

ÉPIDÉMIOLOGIE MATHÉMATIQUES

THEME:

Modèles Épidémiologiques Stochastiques dans une
Population Structurée en Âge

Auteur: YEO Yardjouma

Université Felix Houphouet Boigny de Cocody

Côte d'Ivoire

yardjoumayeo01@gmail.com/y.yardjouma@yahoo.fr

écrit le 3 octobre 2020

Table des matières

Introduction	6
1 Quelques Notions sur les Processus Stochastiques	20
1.1 Définitions et Notations	21
1.2 Martingale en Temps Continu	22
1.3 Processus de Poisson	23
1.3.1 Définitions	23
1.3.2 Quelques Propriétés	26
2 Présentation des Modèles Déterministes dans une Popula- tion Structurée en Âge	30
2.1 Notations et Définitions	31
2.2 Modèle Déterministe avec Densité de la Population	33
2.2.1 Dynamique du Système SIR	34
2.3 Modèle Déterministe avec Nombre d'Individus	41
3 Présentation des Modèles Stochastiques dans une Popula- tion Structurée en Âge	44

TABLE DES MATIÈRES

3.1	Modèles Stochastiques avec Densité de la Population	45
3.2	Modèles Stochastiques avec Nombre d'Individus	48
3.2.1	Loi des Grands Nombres	49
3.2.2	Théorème Centrale Limite	62
4	Simulations Numériques	80
4.1	Simulation du Modèle	81
4.2	Force d'infection	84
4.3	Taux de Guérison Décroissant	86
4.4	Taux de Guérison Croissante	87
4.5	Courbe Représentative de la Variation du Nombre d'Individus de Chaque Compartiment	89
4.6	Mise en Évidence de la Loi des Grands Nombres	93
4.7	Mise en Évidence du Théorème de la Limite Centrale	97
	Bibliographie	100

Table des figures

2.1	Modèle SIR structuré en âge	33
2.2	Modèle SIR structuré en âge	41
4.1	Les étapes du processus de simulation Selon Drogoul	82
4.2	Evolution de l'âge en fonction du temps	83
4.3	Evolution de la force d'infection en fonction du temps.	85
4.4	Evolution du Taux de Guérison en fonction du temps.	86
4.5	Evolution du Taux de guérison en fonction de l'âge.	87
4.6	Tableau des valeurs.	89
4.7	Evolution des Pramètres en fonction du temps.	90
4.8	Evolution des Pramètres en fonction du temps.	91
4.9	Evolution des Pramètres en fonction du temps.	92
4.10	Evolution des Pramètres en fonction du temps.	93
4.11	Mise en évidence de la loi des grands nombres pour N=1000 .	94
4.12	Mise en évidence de la loi des grands nombres pour N=10000	96
4.13	Mise en évidence de la loi des grands nombres pour N=100000	97
4.14	Mise en évidence du théorème de la limite centrale	97

Liste des tableaux

Dédicace

Je dédie ce travail à Dieu ALPHA et OMEGA, Le PREMIER et le DERNIER que son nom soit loué.

Remerciement

Historique

L'épidémiologie est la science qui étudie les variations de fréquences des maladies dans les groupes des êtres vivants et recherche les déterminants de ces variations. Elle vise en particulier à la recherche des causes des maladies et de l'amélioration de leurs traitements et moyens de prévention.

On peut certes invoquer Hippocrate comme père de l'épidémiologie, puisque, dans son *Traité des airs, des eaux et des lieux* (400 av. J.-C.), il cherchait déjà des déterminants environnementaux, et non pas seulement individuels, aux maladies. Mais si l'on admet ne parler d'épidémiologie en tant que science qu'à partir du moment où des schémas observationnels (enquêtes, registres, études), expérimentaux (essais thérapeutiques comparés) et théoriques (modèles populationnels) sont employés, avec des méthodes de recueil et d'analyse des données adaptées, c'est au XVII^e siècle que l'on voit apparaître en Angleterre les premiers travaux qui seraient classés aujourd'hui comme épidémiologiques [1].

L'Angleterre fut sans doute le premier pays à recueillir une information épidémiologique sur les morts. Dès 1538, un document était rempli pour chaque

décès et des statistiques de mortalité hebdomadaire et annuelle étaient effectuées systématiquement. C'est ce qu'on appelait les "bills of mortality". Ces données furent recueillies systématiquement à Londres après 1592. Le recueil d'informations sur la cause de mortalité fut effectué systématiquement à partir de 1603.

Ces travaux initient donc ce qu'on appellerait aujourd'hui la surveillance épidémiologique ("processus continu de recueil de données sanitaires au cours du temps permettant de documenter des changements éventuels et de créer des alertes sanitaires "). Il est remarquable que, dès cette époque, le bulletin hebdomadaire des décès ait été publié à Londres pour ainsi dire en temps réel si l'on se souvient que l'on n'eut pas, même à Paris, au cours de la canicule de 2003, l'estimation en temps réel de la mortalité hebdomadaire toutes causes confondues.

Mais ce sont les travaux de Graunt en 1662 (Natural and Political Observations... Upon the Bills of Mortality) qui peuvent être considérés comme le premier travail épidémiologique (et de démographie statistique) au sens actuel : en effet, il fournit une analyse en profondeur de ces bulletins de mortalité en évaluant d'une part les sources d'erreurs et de biais qui pouvaient rendre leur interprétation difficile, et en mettant d'autre part en évidence des régularités dans les séries de décès et les pics épidémiques, de taille variable, qui furent attribués à des épidémies récurrentes de peste.

L'observation des récurrences passées permit de comprendre que le bulletin hebdomadaire de mortalité n'était pas simplement un document adminis-

tratif, mais pouvait être un outil d'alerte épidémiologique. Ensuite, dans le cadre d'une collaboration au contour non totalement élucidé, Graunt établit avec son ami Petty la première " table de mortalité ", l'outil de base des démographes, ces proches cousins des épidémiologistes.

Christian Huygens, mathématicien et astronome anglais qui analyse avec son frère Lodewijk la table de vie de Graunt, en déduit une méthode de calcul de l'espérance de vie en fonction de l'âge. Ainsi, on voit apparaître la première manifestation de la parenté entre épidémiologistes et astronomes : ils appartiennent en effet à deux disciplines qui, à partir de l'observation, essaient "d'inférer" des lois (même si l'équivalent des lois de Kepler en épidémiologie est encore à découvrir). Leibniz travaillera à son tour la notion de " vie moyenne ", mais plutôt dans un état d'esprit d'actuaire, avec *De Incerti Aestimatione* (1678). Autre connexion historique importante entre l'astronomie et l'épidémiologie, celle de Graunt avec Halley, le découvreur de la comète éponyme, auquel il envoya sa table de vie. Celui-ci la critiqua à la fois sur le plan des données avec lesquelles elle avait été construite (rôle négligé de l'immigration) et sur le plan de la méthode de calcul. Il fournit en 1693 la première table de vie bâtie avec un algorithme de récurrence, appliquée aux données de Breslau (aujourd'hui Wrocław). Cette table allait être utilisée en retour par le premier des modélisateurs en épidémiologie, Daniel Bernoulli (1700 – 1782) qui, avec ses frères Nicolaus et Johann, était un thuriféraire du calcul différentiel de Leibniz : C'est la naissance de l'épidémiologie Mathématiques.

Célèbre pour ses travaux hydrodynamiques, Bernoulli avait aussi une large palette d'intérêts en astronomie, en philosophie et en médecine. C'est donc naturellement qu'il allait s'intéresser à la prévention de la variole (dite alors petite vérole). À l'époque, on estimait qu'une grande partie de la population anglaise avait été infectée par la variole et qu'un enfant qui en était atteint avait entre 20 et 30 chances sur 100 de mourir.

En un temps où la variolisation était cependant fort controversée car, dans une proportion non négligeable des cas, les enfants étaient contaminés et mouraient, Bernoulli comprit qu'il fallait mettre en avant ce que l'on appellerait aujourd'hui une approche coût-bénéfice. Exploitant les données de Halley, il construisit un modèle mathématique fondé sur des hypothèses simples- car, dit-il, " les lois de la nature les plus simples sont toujours les plus vraisemblables ".

Le travail de Bernoulli n'est pas seulement d'une grande modernité parce qu'il utilise la modélisation pour évaluer une action de santé publique qui ne peut pas être observée directement, avec une méthode semblable à celle que les modernes modélisateurs ont employée en prévision d'une pandémie grippale qui survint en 2009. Sa modernité est aussi dans les polémiques que son approche provoqua dans la société, qu'elle soit savante ou profane.

D'Alembert, le père de l'Encyclopédie, l'un de ses adversaires les plus déterminés à l'Académie royale des sciences où le travail fut présenté en 1760 (et publié seulement en 1765), non seulement critique de façon pointilleuse la qualité des mathématiques utilisées (critiques qui mesurent surtout l'impor-

tance de son hostilité à l'égard de Bernoulli), mais ce qui est moins souligné émet aussi des critiques de fond extrêmement modernes.

La première est que l'espérance de vie n'est peut-être pas le bon critère de comparaison et que la population n'est pas prête à échanger un risque immédiat même faible (celui de l'inoculation) contre un risque lointain. Cette critique très sensée fut du reste endossée par Laplace (1749 – 1827) dans son Essai sur les probabilités. La seconde critique est que les risques médicaux dépendent des opérateurs. Si l'on arrive à réduire le risque immédiat de la procédure (inoculation) à une valeur égale à celle du risque immédiat de contracter la variole naturellement, il est évident que, dès lors, la population choisira d'être variolisée. Il faut donc proposer ce qu'on appellerait aujourd'hui des méthodes " d'assurance de la qualité ". La troisième critique est que, pour construire des modèles mathématiques sérieux, il faut des données de qualité, que ce soit sur les risques ou sur l'histoire naturelle des maladies : c'est la nécessité primordiale d'un système d'information efficace qui est soulignée (et qui reste d'une parfaite actualité).

Une dernière remarque négative, et peut-être d'actualité, concernant le travail de Bernoulli, toujours cité comme le pionnier de l'épidémiologie mathématique, est que cet appareillage mathématique sophistiqué, objet de polémiques entre les plus beaux esprits mathématiques, arrivait deux siècles en retard par rapport à la pratique acceptée en Asie mineure, plusieurs années après des données observationnelles recueillies par divers médecins et scientifiques (dont Benjamin Franklin), et qu'au fond toutes ses conclusions

étaient déjà contenues et exprimées beaucoup plus agréablement que dans le langage des équations dans la XIe des Lettres philosophiques de Voltaire publiée en 1734, soit plus de trente ans auparavant. Un regard critique sur l'apport de la modélisation en épidémiologie pouvait donc, déjà, s'imposer. En 1765, année où Bernoulli produisait son modèle, Jenner publiait ses premières observations (qui passèrent largement inaperçues), avant de faire sa première expérimentation humaine en 1796. Peu à peu, alors que la variolisation s'installait, la vaccination dont on comprit qu'elle était aussi efficace et moins dangereuse apparaissait. Ce n'est qu'en 1840 que la variolisation fut interdite en Angleterre au bénéfice de la vaccination, qui fut fournie gratuitement.

Les grands chapitres de l'épidémiologie moderne s'ouvrent au XIXe siècle avec des contributions où les scientifiques français jouent un rôle majeur : naissance de l'épidémiologie clinique et de ce qu'on appelle aujourd'hui la "médecine fondée sur les preuves " avec le nom de Pierre Louis et celui, bien plus connu du grand public mais pas dans ce domaine, de Claude Bernard. Épidémiologie sociale avec Villermé; épidémiologie d'intervention et de surveillance épidémiologique avec William Farr; systématisation de l'information recueillie dans les populations avec Quetelet.

Au début du XIX_e siècle, contagionnistes et anticontagionnistes s'affrontaient sur les causes des maladies, tandis que prévalait toujours la théorie hippocratique des miasmes. D'après cette théorie, les disparités de santé observées entre différents territoires s'expliquaient par des facteurs topogra-

phiques : différences d'altitude, de densité de population, proximité ou non d'une rivière.

Louis-René Villermé (1782 – 1863), décidant de prendre les données à bras-le-corps, voulut tester l'hypothèse selon laquelle les inégalités de santé observées dans les douze arrondissements de Paris dans la période 1817 – 1826 s'expliqueraient essentiellement par des facteurs sociaux (Paris ne fut divisé en vingt arrondissements que par la loi du 16 juin 1859).

Il montra que des variables économiques (impôt moyen, prix moyen de location des logements, etc.) étaient corrélées négativement à la mortalité, tandis que la densité de population ne l'était pas. Villermé apporte deux autres contributions majeures à l'épidémiologie sociale : la première concerne la santé des personnes emprisonnées, dont il montra qu'elle était corrélée aux conditions d'emprisonnement et non pas à la qualité morale des prisonniers. Dans la seconde, il fit observer que l'espérance de vie variait selon les conditions sociales des travailleurs des industries textiles. Ses travaux furent à l'origine des premières lois limitant les conditions dans lesquelles on pouvait recourir au travail des enfants ou louer des logements plus ou moins insalubres.

Pierre-Charles-Alexandre Louis (1787 – 1872), médecin, eut le courage de contester une pratique médicale dominante de l'époque : la saignée, souvent pratiquée grâce à des sangsues (en 1833, la France importait 42 millions de sangsues pour usage médical). L'idée était à l'époque que toutes les fièvres avaient la même origine, étant la manifestation d'une inflammation

des organes, et qu'appliquer des sangsues était efficace-théorie dont Broussais (1762 – 1838) était un grand thuriféraire

Pour la remettre en cause, Louis établit une observation rigoureuse sur un groupe de malades ayant tous une forme bien caractérisée de pneumonie et conclut-au mieux-à une très faible efficacité de la pratique. Si ce qu'on a appelé la " méthode numérique " de Pierre Louis était révolutionnaire, parce qu'il cherchait à tirer des conclusions à partir de données numériques recueillies systématiquement au lit du malade, et non à partir d'opinions, fût-ce celles des "maîtres", il lui manquait le support de ce qu'on appelle aujourd'hui la statistique. À cet égard, Jules Gavarret (1809 – 1890), polytechnicien, fut pionnier avec son livre Principes généraux de statistique médicale (1840). Auteur du premier intervalle de confiance, il fut le premier polytechnicien président de l'Académie de médecine.

Dans les systèmes d'information sanitaire, la classification est évidemment une étape clé, et là aussi les Français ont eu un rôle très important puisque la première classification internationale des maladies fut créée par Jacques Bertillon (un proche parent d'Alphonse Bertillon, "inventeur" des empreintes digitales) et que, ce faisant, il était le lointain continuateur de François Boissier de Sauvages de Lacroix, fondateur de la nosologie avec sa classification de 2400 maladies publiée post mortem en 1771.

Claude Bernard est souvent présenté comme un adversaire irréconciliable de la statistique et de l'épidémiologie. Il a ainsi tourné en dérision l'idée "d'urine moyenne" de l'homme européen obtenue en opérant des prélève-

ments dans les pissotières de la gare du Nord. En cela, il n'appréciait guère les efforts de ceux qui, comme Adolphe Quetelet (1796 – 1874), statisticien, inventeur de l'index de corpulence [poids/taille] toujours utilisé, mathématicien, astronome et naturaliste franco-belge) avaient foi dans le recueil systématique de l'information dans des grandes populations et-en effet-avait défendu le concept "d'homme moyen" (celui dont les paramètres individuels seraient égaux à la moyenne des paramètres de la population). Mais Claude Bernard a souligné très clairement la nécessité en clinique d'expérimentations comparatives, notamment dans l'évaluation des traitements. Il a écrit, dans son Introduction à la médecine expérimentale, des passages soulignant clairement la nécessité de ce qu'on appellerait aujourd'hui des essais thérapeutiques contrôlés. On a donc pu dire de lui que, avec Pierre Louis, il était le second fondateur français de ce qu'on appelle maintenant dans le monde anglo-saxon l'evidence based medicine, la " médecine fondée sur la preuve ". Depuis les années 1980, avec la conscience de l'importance des maladies émergentes, la surveillance épidémiologique est devenue un domaine important de l'épidémiologie, à la fois en termes de méthode (recherche de systèmes temps réel) et de résultats (découverte du sida, par exemple).

La surveillance épidémiologique avait pris son essor au *XIX* siècle à Londres avec William Farr (1807 – 1883) qui, lorsque le bureau des registres fut établi en Angleterre en 1838, devint rapidement responsable du département statistique. Il mit en place une classification des causes des maladies, travailla rigoureusement à la définition des dénominateurs permettant de calculer les

risques et comprit qu'il n'est pas de recueil et d'analyses de données sans une diffusion appropriée (ce qu'il fit grâce à un grand nombre de bulletins hebdomadaires, semestriels, etc.). Il montra comment cette connaissance devait déboucher sur des méthodes de prévention et fut le premier à décrire la chronologie et la taille des épidémies de grippe.

Le XX_e siècle s'ouvre sur le prix Nobel de Ross (1902), le modélisateur pilote de l'épidémiologie du paludisme; dans les années 1930, la démarche du test d'hypothèse, indispensable à la recherche des facteurs de risque est mise au point par Neyman et Pearson; l'après-Seconde Guerre mondiale verra naître et croître l'épidémiologie analytique; les années 1980 verront renaître la crainte des maladies infectieuses; les années 1990 seront celles des promesses du décryptage du génome[3]. Surtout, depuis les années 1990, la puissance des moyens de calculs et de recueil de l'information permet de développer à un tout autre niveau les recherches des causes génétiques et environnementales des maladies qui avaient été initiées par les pionniers des siècles passés.

Ses résultats concernant le choléra, obtenus au milieu du XIX_e siècle, mirent eux aussi en cause la théorie des miasmes, et soutinrent l'hypothèse que la cause du choléra était dans l'eau. C'est un autre épidémiologiste anglais, Snow, qui en apportera une démonstration définitive en géolocalisant les cas dans un quartier de Londres et en identifiant la source de la contamination (une pompe à eau bien précise).

Au total, à la fin du XIX_e siècle, la plupart des grands champs de l'épidé-

miologie étaient créés, qu'il s'agisse de l'épidémiologie descriptive fondée sur de grands registres systématiques, de l'épidémiologie expérimentale où l'on évalue l'efficacité de plusieurs traitements en les comparant de façon rigoureuse sur des groupes de patients, ou de l'épidémiologie théorique, surtout utilisée dans le domaine des épidémies afin de comprendre leurs lois et d'établir des prévisions. Seule l'épidémiologie des maladies multifactorielles n'était pas encore prête. C'est en 1856 que la première loi de Mendel est découverte, mais elle tombe dans l'oubli jusqu'en 1900; les pathologies dominantes en santé publique sont encore les maladies infectieuses; la recherche des facteurs génétiques et environnementaux des grandes pathologies, qui est une priorité de l'épidémiologie moderne, ne peut donc encore être menée, mais les concepts ont déjà été réunis.

Introduction générale

Les modèles mathématiques de maladies infectieuses, d'abord outils purement théoriques, ont commencé à être mis en pratique avec le problème du SIDA dans les années 1980. La propagation d'une épidémie dans une population dépend des paramètres extrêmement nombreux (déplacement des individus, souches de la maladie, âge des individus...), les modèles mathématiques se sont progressivement affirmés comme outils d'aide à la décision pour les politiques publiques.

En effet, les modèles permettent de prévoir les conséquences pour la population d'actions aussi variées que la vaccination, la mise en quarantaine ou la distribution tests de dépistage. Une approche fondatrice dans les années 1920 fut celle des modèles compartimentaux, divise la population en classes épidémiologiques tels que le compartiment des susceptibles noté S , des infectés noté I et celui des remis noté R .

Depuis, cette approche fut utilisée pour modéliser de très nombreuses maladies, et continue d'être un sujet de recherche actif en prenant en compte de nouveaux éléments tels que de la science des réseaux.

L'âge peut être un facteur important de la diffusion d'une maladie pour

deux raisons. Premièrement la résistance des sujets peut dépendre de l'âge. Un exemple consiste à séparer les enfants des adultes : Dans les cas des épidémies de rougeole aux États-Unis en 1827 et 1828, la population étudiée était composée de 21% d'enfants mais ceux-ci représentaient 44% de décès. Deuxièmement, le comportement des sujets change avec l'âge : Ainsi, il est considéré que la probabilité qu'un individu s'engage dans une activité sexuelle à risque décroît avec l'âge, et des modèles prennent en compte l'impact de l'âge sur des aspects tels que le taux de changements de partenaire sexuels. La prise en compte de l'âge se fait en utilisant une nouvelle variable a . Ainsi, dans le modèle SIR , les quantités d'individus au temps t ne sont plus noté $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ mais $S(a, t)$, $I(a, t)$, $R(a, t)$ pour représenter la quantité avec un âge donné au temps t .

Dans notre étude, notre objectif sera de donner une modélisation stochastique des modèles épidémiologiques dans les populations structurées en âge d'une part, et d'autre part étudier les propriétés de ces modèles.

Chapitre 1

Quelques Notions sur les Processus

Stochastiques

Introduction

La théorie des probabilités et statistiques est un domaine très vaste des mathématiques. Nombreux sont les mathématiciens tels que I.Karatzas, S.Shreve avec son livre "Brownian motion and stochastic calculus" publié dans Springer à Berlin en 1987 ont travaillé dans ce domaine des mathématiques. Ils vont développer des théories de mathématiques tout en donnant un intérêt particulier aux calculs stochastiques. Pour eux, l'application de la théorie des probabilités et statistiques, en particulier l'application du calcul stochastique est la solution de plusieurs problèmes aux quels se trouvent confrontés l'humanité.

Ainsi, pour contribuer à la résolution des problèmes d'épidémies, nous allons appliqués quelques définitions et propriétés de calcul stochastique.

Dans ce chapitre, les notions de base de calcul stochastique sont données. Les quelles vont permettre d'aborder soigneusement notre modélisation épidémiologique dans le chapitre 2 et 3.

Pour commencer, on fixe $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1.1 Définitions et Notations

Définition 1.1 *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé et généralement indexées par \mathbb{R}_+ , où \mathbb{N} .*

Définition 1.2 *On appelle filtration, une famille croissante de sous-tribus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de \mathcal{F} .*

C'est-à-dire $\forall 0 \leq s \leq t \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

Définition 1.3 *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle filtration naturelle de $(X_t)_{t \geq 0}$, la filtration \mathcal{F}_t engendrée par $(X_t)_{t \geq 0}$.
Où*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t).$$

Définition 1.4 *Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus stochastique défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Le processus X est dit mesurable si l'application*

$$X : [0; +\infty[\times \Omega \rightarrow (E, \mathcal{E})$$

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, +\infty[) \otimes \mathcal{F}$. Le processus est dit progressivement mesurable (ou progressif) si $\forall t \geq 0$ l'application

$$X : [0; t] \times \Omega \rightarrow (E, \mathcal{E})$$

$$(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$$

est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{B}([0, t] \otimes \mathcal{F}_t$.

Le processus est dit adapté si $\forall t \geq 0$ X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

Définition 1.5 Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ processus stochastique. On appelle trajectoire de $(X_t)_{t \geq 0}$ l'application $t \mapsto X_t(\omega) \forall \omega \in \Omega$.

1.2 Martingale en Temps Continu

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré.

Définition 1.6 Soit M un processus adapté avec $\forall t \geq 0 \quad M_t \in L^1$. on dit que

- M est $\mathcal{F}_{t \geq 0}$ -sousmartingale si $M_s \leq \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

- M est $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -surmartingale si $M_s \geq \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

- M est $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -martingale si $M_s = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

Définition 1.7 Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique intégrable. On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(|X_t| \mathbb{1}_{|X_t| \geq n}) = 0$$

Définition 1.8 Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une \mathcal{F}_t -martingale. On dit que $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale fermée à l'infini, s'il existe une variable aléatoire M_∞ intégrable telle que $M_t = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_t)$.

Définition 1.9 Soit $\tau : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que τ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, si $\forall t \geq 0$ l'événement $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Théorème 1.1 (Inégalité maximale de Doob)

Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue à droite dans L^p pour tout $p > 1$.

Alors on a

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \geq 0} |M_t|^p \right) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(|M_t|^p)$$

1.3 Processus de Poisson

1.3.1 Définitions

Définition 1.10 On appelle processus ponctuel une suite croissante

$$0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < \dots < +\infty \tag{1.1}$$

de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}_+ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dans la suite on supposera que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

On pose :

$$T_0 = 0$$

$$S_1 = T_1 - T_0$$

.....

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n = T_n - T_{n-1}.$$

Les T_n sont les instants où se produisent des événements. Les S_n sont les délais d'attentes entre deux événements successifs.

Notons

$$N_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{T_k \leq t\}} = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\} \quad (1.2)$$

le nombre d'événements qui se produisent avant l'instant $t \geq 0$.

N_t est aussi appelé processus de comptage. On a :

$$N_0 = 0$$

$$N_t < +\infty$$

$$\forall 0 \leq s < t, \quad N_t - N_s$$

est égal au nombre d'événements qui se produisent dans l'intervalle de temps $]s, t]$.

Définition 1.11 *On dit qu'un processus ponctuel $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou sa fonction aléatoire de comptage $(N_t)_{t \geq 0}$ est un **processus de Poisson**, si $(N_t)_{t \geq 0}$ est une fonction aléatoire à accroissements indépendants et stationnaires.*

C'est-à-dire :

a) $\forall 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ les accroissements $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes $\forall i = 1 \dots n$.

b) $\forall 0 \leq s < t$, $N_t - N_s$ dépend uniquement de $t-s$ et non de t et s .

Remarque 1.1 *La propriété b) est appelée la "stationnarité des accroissements" de $(N_t)_{t \geq 0}$. Le nom "**processus de Poisson**" est justifié par la proposition 6.2.2 de [3]. L'existence d'un paramètre λ est donné par cette proposition. Ce paramètre λ est appelé l'**intensité** du processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$. Il est égal au nombre moyen d'événements qui se produisent pendant un intervalle de temps de longueur unité, i.e.*

$$\mathbb{E}[N_1 - N_0] = \lambda.$$

Définition 1.12 *Un processus de Poisson $(P(t))_{t \geq 0}$ de fonction d'intensité*

$\lambda(t) \geq 0$ est un processus de contage à accroissements indépendants et stationnaires tel :

$$\forall 0 \leq s < t, \quad \mathbb{P}(P(t) - P(s) = k) = \frac{1}{k!} e^{-\int_s^t \lambda(u) du} \left(\int_s^t \lambda(u) du \right)^k \quad (1.3)$$

On dit aussi que $(P(t))_{t \geq 0}$ est un processus de Cox.

1.3.2 Quelques Propriétés

Proposition 1.1 Soit $(P(t))_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de fonction d'intensité $\lambda(t) \geq 0$. Alors

$$\forall 0 \leq s < t, \quad \mathbb{E}(P(t) - P(s)) = \int_s^t \lambda(u) du$$

Preuve

Soit $(P(t))_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de fonction d'intensité $\lambda(t) \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(P(t) - P(s)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} e^{-\int_s^t \lambda(u) du} \left(\int_s^t \lambda(u) du \right)^k \\ &= e^{-\int_s^t \lambda(u) du} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\int_s^t \lambda(u) du)^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\int_s^t \lambda(u) du} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\int_s^t \lambda(u) du)^{k+1}}{k!} \\ &= e^{-\int_s^t \lambda(u) du} e^{\int_s^t \lambda(u) du} \int_s^t \lambda(u) du \\ &= \int_s^t \lambda(u) du\end{aligned}$$

■

Proposition 1.2 *Soit $(P(t))_{t \geq 0}$ un processus de poisson de fonction d'intensité $\lambda(t) \geq 0$. Alors*

$$\left(P(t) - \int_0^t \lambda(u) du \right)_{t \geq 0}$$

est une martingale par rapport à la filtration

$$\mathcal{F}_t = \sigma((P(r), \lambda(r)) : 0 \leq r < t)$$

Preuve

Soit $(P(t))_{t \geq 0}$ un processus de poisson de fonction d'intensité $\lambda(t) \geq 0$.

En posant $\mathcal{F}_t = \sigma((P(r), \lambda(r)) : 0 \leq r < t)$ la σ -algèbre engendrée par les variables aléatoires $(P(r), \lambda(r))$ où $0 \leq r < t \quad \forall t > 0$.

$\forall t > 0$, $\forall 0 \leq s < t$ la variable aléatoire $P(t) - \int_s^t \lambda(u)du$ est \mathcal{F}_t -adaptée. Le processus $(P(t))_{t \geq 0}$ est un processus de poisson de fonction d'intensité $\lambda(t) \geq 0$. Donc $\forall 0 \leq s < t$ la variable aléatoire $P(t) - \int_0^t \lambda(u)du$ est intégrable.

En outre :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(P(t) - \int_0^t \lambda(u)du \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(P(t) - P(s) + P(s) - \int_0^t \lambda(u)du \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(P(t) - P(s)) + \mathbb{E}(P(s) - \int_0^t \lambda(u)du \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(P(t) - P(s)) + \mathbb{E}(P(s) - \int_0^s \lambda(u)du - \\ &\quad \int_s^t \lambda(u)du \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \int_s^t \lambda(u)du + P(s) - \int_0^s \lambda(u)du - \int_s^t \lambda(u)du \\ &= P(s) - \int_s^t \lambda(u)du \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Conclusion

Nous avons présenté quelques notions de base sur le calcul stochastique. Ces notions nous serviront dans la suite de notre étude. Cependant, si les notions de base de calcul stochastique présentées dans le chapitre 1 sont utiles dans notre étude, l'on devrait remarquer que ce n'est

pas la totalité. Pour une bonne documentation de calcul stochastique, l'on devrait voir auteur[5].

Dans la suite de notre travail, le calcul stochastique sera appliqué. Les processus de Poissons aboutiront à la notion de Martingale en temps continu et au Mouvement Brownien.

Chapitre 2

Présentation des Modèles

Déterministes dans une Population

Structurée en Âge

Introduction

Dans ce chapitre, on considère une population de très grande taille. Dans la quelle règne une épidémie de maladie.

Notre modélisation fourni un modèle mathématique pour une propagation d'épidémie dans une population structurée en âge.

Le taux de transmission de la maladie dépend de l'âge des individus de la population. Le modèle obtenu est un modèle SIR déterministe avec une population de taille constante.

Le but de ce chapitre est de présenter les techniques de la modélisation des épidémies dans les population structurée en âge d'une part, et d'autre part, donner les paramètres lier à la description des performances de ces systèmes.

2.1 Notations et Définitions

Dans cette section, on désigne par :

t : Le temps ;

N : La taille de la population des individus de même âge ;

$\mu(a)$: Taux de décès ;

ω : La durée maximal de l'épidémie ;

a : L'âge d'un individu observé dans le groupe ;

a_0 l'âge d'un individu observé au début de l'épidémie ;

γ : Le Taux de guérissons est borné dans $L^1(\mathbb{R}_+ \times [0, \omega], \mathbb{R}_+)$;

$$\begin{aligned} \forall a_0 \in \mathbb{R}, \quad g_{a_0} : [0; \omega] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto a_0 + t \end{aligned}$$

une fonction de classe C^1 et on note g'_{a_0} sa dérivée ;

$$\gamma^* = \sup_{(a_0+t,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0;\omega]} \{\gamma(a_0 + t, t)\};$$

$l(a) = e^{-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma}$: La proportion des individus qui survivent à l'âge a ;

$$\mu^* = \frac{1}{\int_0^\omega l(a) da} : \text{Taux de mortalité brut};$$

$\beta(a, b)$: La probabilité qu'un susceptible d'âge a rencontre un individu infecté d'âge b et devienne infecté;

$\lambda(a, t)$: La force d'infection;

$$\lambda^* = \sup_{(a_0+t,t) \in \mathbb{R} \times [0;\omega]} \{\lambda(a_0 + t, t)\};$$

$X(a, t)$: La densité des susceptibles qui à l'instant t ont l'âge a ;

$Y(a, t)$: La densité des infectés qui à l'instant t ont l'âge a ;

$Z(a, t)$: Celle des rémis (guérris) qui à l'instant t ont l'âge a ;

$N(a) = X(a, t) + Y(a, t) + Z(a, t)$: La densité têtal du groupe.

2.2 Modèle Déterministe avec Densité de la Population

Dans tout ce travail, nous allons traiter deux cas intéressant. Le cas où γ est la fonction constante et le cas où γ dépend uniquement de l'âge et du temps. Supposons que γ est la fonction constante.

On obtient le modèle suivant :

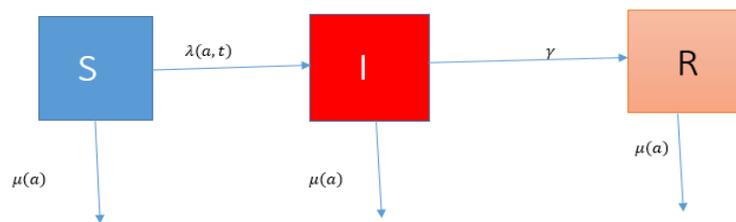


FIGURE 2.1 – Modèle SIR structuré en âge

La modélisation mathématiques conduit au système d' EDP suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \right) X(a, t) = -\lambda(a, t)X(a, t) - \mu(a)X(a, t) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \right) Y(a, t) = \lambda(a, t)X(a, t) - (\mu(a) + \gamma)Y(a, t) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \right) Z(a, t) = \gamma Y(a, t) - \mu(a)Z(a, t) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Les conditions aux bords

$$X(0, t) = \mu^* N, \quad Y(0, t) = 0, \quad Z(0, t) = 0.$$

Où

$$\lambda(a, t) = \int_0^{\omega} \beta(a, \sigma) Y(a, \sigma) d\sigma.$$

2.2.1 Dynamique du Système SIR

L'objectif de cette section est de déterminer l'évolution du système d'EDP

(2.1).

En utilisant la méthode des caractéristiques pour la résolution des EDP, on pose :

$$a = g_{a_0}(t), \quad \forall t \geq 0 \quad \frac{da}{dt} = g'_{a_0}(t) = 1.$$

En se déplaçant le long d'une courbe caractéristique $a = g_{a_0}(t) = a_0 + t$ les variations de X , Y , Z sont :

$$\begin{aligned} dX(a, t) &= \frac{\partial X}{\partial t}(a, t) dt + \frac{\partial X}{\partial a}(a, t) da \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial X}{\partial a}(a, t) \right) dt \\ &= (-\lambda(a, t)X(a, t) - \mu(a)X(a, t)) dt. \end{aligned}$$

$$dX(a, t) = (-\lambda(a, t)X(a, t) - \mu(a)X(a, t)) dt. \quad (2.2)$$

$$X(g_{a_0}(t), t) = X(g_{a_0}(0), 0) - \int_0^t \lambda(g_{a_0}(s), s)X(g_{a_0}(s), s)ds - \int_0^t \mu(a)X(g_{a_0}(s), s)ds.$$

C'est-à-dire

$$X(a_0+t, t) = X(a_0, 0) - \int_0^t \lambda(a_0+s, s)X(a_0+s, s)ds - \int_0^t \mu(a_0+s)X(a_0+s, s)ds.$$

$$\begin{aligned} dY(a, t) &= \frac{\partial Y}{\partial t}(a, t)dt + \frac{\partial Y}{\partial a}(a, t)da \\ &= \left(\frac{\partial Y}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial Y}{\partial a}(a, t) \right) dt \\ &= (\lambda(a, t)X(a, t) - (\mu(a) + \gamma)Y(a, t)) dt \end{aligned}$$

$$dY(a, t) = (\lambda(a, t)X(a, t) - (\mu(a) + \gamma)Y(a, t)) dt \quad (2.3)$$

Donc :

$$Y(g_{a_0}(t), t) = Y(g_{a_0}(0), 0) + \int_0^t \lambda(g_{a_0}(s), s)X(g_{a_0}(s), s)ds - \int_0^t (\mu(g_{a_0}(s)) + \gamma)Y(g_{a_0}(s), s)ds$$

C'est-à-dire

$$Y(a_0+t, t) = Y(a_0, 0) + \int_0^t \lambda(a_0+s, s)X(a_0+s, s)ds - \int_0^t (\mu(a_0+s) + \gamma)Y(a_0+s, s)ds. \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} dZ(a, t) &= \frac{\partial Z}{\partial t}(a, t)dt + \frac{\partial Z}{\partial a}(a, t)da \\ &= \left(\frac{\partial Z}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial Z}{\partial a}(a, t) \right) dt \\ &= (\gamma Y(a, t) - \mu(a)Z(a, t)) dt \end{aligned}$$

$$dZ(a, t) = (\gamma Y(a, t) - \mu(a)Z(a, t)) dt \quad (2.5)$$

$$Z(g_{a_0}(t), t) = Z(g_{a_0}(0), 0) + \int_0^t \gamma Y(g_{a_0}(s), s) ds - \int_0^t \mu(g_{a_0}(s)) Z(g_{a_0}(s), s) ds$$

$$Z(a_0 + t, t) = Z(a_0, 0) + \int_0^t \gamma Y(a_0 + s, s) ds - \int_0^t \mu(a_0 + s) Z(a_0 + s, s) ds.$$

On obtient donc le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(a_0 + t, t) = X(a_0, 0) - \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) X(a_0 + s, s) ds - \int_0^t \mu(a_0 + s) X(a_0 + s, s) ds \\ Y(a_0 + t, t) = Y(a_0, 0) + \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) X(a_0 + s, s) ds - \int_0^t (\mu(a_0 + s) + \gamma) Y(a_0 + s, s) ds \\ Z(a_0 + t, t) = Z(a_0, 0) + \int_0^t \gamma Y(a_0 + s, s) ds - \int_0^t \mu(a_0 + s) Z(a_0 + s, s) ds. \end{array} \right.$$

Maintenant nous allons passer aux proportions. Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(a_0 + t, t) = \frac{X(a_0+t,t)}{N(a_0+t)} = \frac{1}{N} \frac{X(a_0+t,t)}{\mu^* l(a_0+t)} \\ y(a_0 + t, t) = \frac{Y(a_0+t,t)}{N(a_0+t)} = \frac{1}{N} \frac{Y(a_0+t,t)}{\mu^* l(a_0+t)} \\ z(a_0 + t, t) = \frac{Z(a_0+t,t)}{N(a_0+t)} = \frac{1}{N} \frac{Z(a_0+t,t)}{\mu^* l(a_0+t)}. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Les conditions initiales sont :

$$x(a_0, 0) = 1 \quad y(a_0, 0) = 0 \quad z(a_0, 0) = 0.$$

Du faite de la relation

$$X(a, t) + Y(a, t) + Z(a, t) = N(a),$$

on a :

$$x(a_0 + t, t) + y(a_0 + t, t) + z(a_0 + t, t) = 1 \quad (2.7)$$

Vue le système (2.6) , nous allons réécrire le système (2.1). On a :

$$\frac{\partial X}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial X}{\partial a}(a, t) = -\lambda(a, t)X(a, t) - \mu(a)X(a, t).$$

Comme

$$x(a, t) = \frac{X(a, t)}{N(a)} \quad \Rightarrow \quad X(a, t) = N(a)x(a, t).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial a}(a, t) &= -\mu^* N \mu(a) l(a) x(a, t) + N(a) \frac{\partial x}{\partial a}(a, t) \\ &= -\mu(a) N(a) x(a, t) + N(a) \frac{\partial x}{\partial a}(a, t). \end{aligned}$$

Donc d'après (2.6)

$$\frac{\partial X}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial X}{\partial a}(a, t) = N(a) \frac{\partial x}{\partial t}(a, t) + N(a) \frac{\partial x}{\partial a}(a, t) - N(a) \mu(a) x(a, t)$$

$$N(a)\frac{\partial x}{\partial t}(a, t) + N(a)\frac{\partial x}{\partial a}(a, t) - N(a)\mu(a)x(a, t) = -\lambda(a, t)N(a)x(a, t) - N(a)\mu(a)x(a, t)$$

Par consequent

$$\frac{\partial x}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial x}{\partial a}(a, t) = -\lambda(a, t)x(a, t) \quad (2.8)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial a}(a, t) &= -\mu^* N\mu(a)l(a)y(a, t) + N(a)\frac{\partial y}{\partial a}(a, t) \\ &= -\mu(a)N(a)y(a, t) + N(a)\frac{\partial y}{\partial a}(a, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial Y}{\partial a}(a, t) &= N(a)\frac{\partial y}{\partial t}(a, t) + N(a)\frac{\partial y}{\partial a}(a, t) - N(a)\mu(a)y(a, t) \\ &= \lambda(a, t)N(a)x(a, t) - (\mu(a) + \gamma)N(a)y(a, t) \end{aligned}$$

D'après (2.6)

$$N(a)\frac{\partial y}{\partial t}(a, t) + N(a)\frac{\partial y}{\partial a}(a, t) - N(a)\mu(a)y(a, t) = \lambda(a, t)N(a)x(a, t) - (\mu(a) + \gamma)N(a)y(a, t)$$

D'où

$$\frac{\partial y}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial y}{\partial a}(a, t) = \lambda(a, t)x(a, t) - \gamma y(a, t) \quad (2.9)$$

De même

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial Z}{\partial a}(a, t) &= N(a)\frac{\partial z}{\partial t}(a, t) + N(a)\frac{\partial z}{\partial a}(a, t) - N(a)\mu(a)z(a, t) \\ &= \gamma N(a)y(a, t) - \mu N(a)z(a, t) \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (2.6)

$$N(a)\frac{\partial z}{\partial t}(a, t) + N(a)\frac{\partial z}{\partial a}(a, t) - N(a)\mu(a)z(a, t) = \gamma N(a)y(a, t) - \mu N(a)z(a, t)$$

D'où

$$\frac{\partial z}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial z}{\partial a}(a, t) = \gamma y(a, t) \quad (2.10)$$

Ainsi on a le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial x}{\partial a}(a, t) = -\lambda(a, t)x(a, t) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial y}{\partial a}(a, t) = \lambda(a, t)x(a, t) - \gamma y(a, t) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial z}{\partial a}(a, t) = \gamma y(a, t) \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Le système (2.11) nous montre que l'évolution d'une telle épidémie est

indépendant du taux de décès des individus. En effet, dans une épidémie lorsque les taux de décès de tout les compartiments sont égaux, alors l'on peut ignorer ces taux. Par conséquent, le nombre de paramètres diminue et le calcul se simplifie.

Nous allons donner une modélisation simplifiée du modèle déterministe.

2.3 Modèle Déterministe avec Nombre d'Individus

On suppose que la taille de la population est constante pour tout $t \geq 0$ et pour tout âge $a \geq 0$.

On désigne par :

$S(a, t)$ le nombre d'individus susceptibles qui à l'instant t ont l'âge a .

$I(a, t)$ le nombre d'individus infectés qui à l'instant t ont l'âge a .

$R(a, t)$ le nombre d'individus remis qui à l'instant t ont l'âge a .

On a donc :



FIGURE 2.2 – Modèle SIR structuré en âge

D'où l'EDP suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \right) S(a, t) = -\lambda(a, t)S(a, t) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \right) I(a, t) = \lambda(a, t)S(a, t) - \gamma(a, t)I(a, t) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \right) R(a, t) = \gamma(a, t)I(a, t) \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Vue la relation $S(a, t) + I(a, t) + R(a, t) = N$ nous allons étudier les deux premières équations.

La dynamique qui décrit le système (2.12) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} S(a_0 + t, t) = S(a_0, 0) - \int_0^t \lambda(a_0 + s, s)S(a_0 + s, s)ds \\ I(a_0 + t, t) = I(a_0, 0) + \int_0^t \lambda(a_0 + s, s)S(a_0 + s, s)ds - \int_0^t \gamma(a_0 + s, s)I(a_0 + s, s)ds \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Conclusion

Nous avons présentés les modèles déterministe de type *SIR*. L'analyse de ces modèles a fourni des résultats. Au cours de notre analyse, nous avons démontrés que lorsque les taux de décès de tout les compartiments sont identiques, dans un modèle compartimental, l'on peut simplifier ce modèle.

2.3. Modèle Déterministe avec Nombre d'Individus

Dans le chapitre 3 nous allons donc considérer le modèle simplifier. Par conséquent, le nombre de paramètres va diminuer et le calcul sera simple.

Chapitre 3

Présentation des Modèles Stochastiques dans une Population Structurée en Âge

Introduction

Le but de ces notes est de présenter les bases du modèle probabiliste de la propagation des épidémies.

Après la modélisation des modèles déterministes, nous introduisons l'étude des modèles stochastiques. Ces modèles vont nous permettre de décrire l'évolution en temps et en âge continue de la population. Au cours de leurs évolutions, les modèles stochastiques prennent en compte les phénomènes aléatoires des paramètres : A savoir si le nombre d'individus infectés est un nombre donné à une date t_1 nous ne connaissons pas le nombre d'individus infectés à une date future t_2 .

Ce pendant, l'on se pose la question pour savoir si dans une population de très grande taille le comportement du modèle stochastique est identique à

son déterministe. La réponse à cette question sera abordée à la suite de la modélisation stochastique.

3.1 Modèles Stochastiques avec Densité de la Population

Soient P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , des processus de Poisson standards indépendants. On définit les processus suivants sous forme des processus de branchements.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_N(a_0 + t, t) = x_N(a_0, 0) - \frac{1}{N(a_0+t)} P_1 \left(\int_0^t N(a_0 + s) \lambda(a_0 + s, s) x_N(a_0 + s, s) ds \right) - \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{1}{N(a_0+t)} P_2 \left(\int_0^t N(a_0 + s) \mu(a_0 + s) x_N(a_0 + s, s) ds \right) \\
 y_N(a_0 + t, t) = y_N(a_0, 0) + \frac{1}{N(a_0+t)} P_1 \left(\int_0^t N(a_0 + s) \lambda(a_0 + s, s) x_N(a_0 + s, s) ds \right) - \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{1}{N(a_0+t)} P_3 \left(\int_0^t N(a_0 + s) \mu(a_0 + s) y_N(a_0 + s) ds \right) + \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{1}{N(a_0+t)} P_4 \left(\int_0^t \gamma N(a_0 + s) y_N(a_0 + s) ds \right) \\
 z_N(a_0 + t, t) = z_N(a_0, 0) + \frac{1}{N(a_0+t)} P_5 \left(\int_0^t \gamma N(a_0 + s) y_N(a_0 + s) ds \right) - \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{1}{N(a_0+t)} P_6 \left(\int_0^t N(a_0 + s) \mu(a_0 + s) z_N(a_0 + s, s) ds \right)
 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Le modèle 3.1 est équivalent au modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_N(a_0 + t, t) = x_N(a_0, 0) - \frac{1}{N} \frac{1}{\mu^* l(a_0+t)} P_1 \left(\int_0^t N \mu^* l(a_0 + s) \lambda(a_0 + s, s) x_N(a_0 + s, s) ds \right) \\
 \quad \quad \quad \frac{1}{N} \frac{1}{\mu^* l(a_0+t)} P_2 \left(\int_0^t N \mu^* l(a_0 + s) \mu(a_0 + s) x_N(a_0 + s, s) ds \right) \\
 y_N(a_0 + t, t) = y_N(a_0, 0) + \frac{1}{N} \frac{1}{\mu^* l(a_0+t)} P_1 \left(\int_0^t N \mu^* l(a_0 + s) \lambda(a_0 + s, s) x_N(a_0 + s, s) ds \right) \\
 \quad \quad \quad \frac{1}{N} \frac{1}{\mu^* l(a_0+t)} P_3 \left(\int_0^t N \mu^* l(a_0 + s) \mu(a_0 + s) y_N(a_0 + s) ds \right) - \\
 \quad \quad \quad \frac{1}{N} \frac{1}{\mu^* l(a_0+t)} P_4 \left(\int_0^t \gamma N \mu^* l(a_0 + s) y_N(a_0 + s) ds \right) \\
 z_N(a_0 + t, t) = z_N(a_0, 0) + \frac{1}{N} \frac{1}{\mu^* l(a_0+t)} P_4 \left(\int_0^t \gamma N \mu^* l(a_0 + s) y_N(a_0 + s) ds \right) - \\
 \quad \quad \quad \frac{1}{N} \frac{1}{\mu^* l(a_0+t)} P_5 \left(\int_0^t N \mu^* l(a_0 + s) \mu(a_0 + s) z_N(a_0 + s, s) ds \right)
 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

3.2 Modèles Stochastiques avec Nombre d'Individus

On considère le modèle (2.13). Posons $i_N(a, t) = \frac{I(a, t)}{N}$, $s_N(a, t) = \frac{S(a, t)}{N}$, $r_N(a, t) = \frac{R(a, t)}{N}$.

On désigne par P_1, P_2 deux processus de Poisson standards. Le modèle stochastique du modèle (2.13) s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} S(a, t) = S(a_0, 0) - P_1 \left(\int_0^t \lambda(a_0 + s, s) S(a_0 + s, s) ds \right) \\ I(a, t) = I(a_0, 0) + P_1 \left(\int_0^t \lambda(a_0 + s, s) S(a_0 + s, s) ds \right) \\ \quad - P_2 \left(\int_0^t \gamma(a_0 + s, s) I(a_0 + s, s) ds \right) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Nous allons réécrire le modèle stochastique.

$$\left\{ \begin{array}{l} s_N(a, t) = s_N(a_0, 0) - \frac{1}{N} P_1 \left(N \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right) \\ i_N(a, t) = i_N(a_0, 0) + \frac{1}{N} P_1 \left(N \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right) \\ \quad - \frac{1}{N} P_2 \left(N \int_0^t \gamma(a_0 + s, s) i_N(a_0 + s, s) ds \right) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

3.2.1 Loi des Grands Nombres

P_1, P_2 étant deux processus de poisson standard, on pose
 $M_1(t) = P_1(t) - t, M_2(t) = P_2(t) - t$. Alors M_1, M_2 sont des martingales.
 D'où

$$s_N(a, t) = s_N(a_0, t) - \frac{1}{N}M_1 \left(N \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right) \\ - \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds$$

$$i_N(a, t) = i_N(a_0, t) + \frac{1}{N}M_1 \left(N \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right) \\ - \frac{1}{N}M_2 \left(N \int_0^t \gamma(a_0 + s, s) i_N(a_0 + s, s) ds \right) \\ + \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds - \int_0^t \gamma(a_0 + s, s) i_N(a_0 + s, s) ds$$

Considérons les processus

$$\mathcal{M}_N^{a_0}(t) = \frac{1}{N}M_1 \left(N \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right)$$

et

$$\mathcal{N}_N^{a_0}(t) = \frac{1}{N}M_2 \left(N \int_0^t \gamma(a_0 + s, s) i_N(a_0 + s, s) ds \right).$$

Posons

$$\mathcal{F}_t^{a_0} = \sigma\{\gamma(a_0 + r, r)i_N(a_0 + r, r), \lambda(a_0 + r, r)s_N(a_0 + r, r) : 0 \leq r \leq t\}.$$

Alors on a :

Lemme 3.1 *Si λ et γ sont bornés, alors $\{\mathcal{M}_N^{a_0}(t), t \geq 0\}$ et $\{\mathcal{N}_N^{a_0}(t), t \geq 0\}$ sont deux martingales par*

rapport à

$$\mathcal{F}_t^{a_0} = \sigma\{\gamma(a_0 + r, r)i_N(a_0 + r, r), \lambda(a_0 + r, r)s_N(a_0 + r, r) : 0 \leq r \leq t\}$$

qui vérifient :

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_N^{a_0}(t)) = \mathbb{E}(\mathcal{N}_N^{a_0}(t)) = 0$$

et

$$\mathbb{E}(|\mathcal{M}_N^{a_0}(t)|^2) = \frac{1}{N}\mathbb{E}\left(\int_0^t \lambda(a_0 + s, s)s_N(a_0 + s, s)ds\right)$$

$$\mathbb{E}(|\mathcal{N}_N^{a_0}(t)|^2) = \frac{1}{N}\mathbb{E}\left(\int_0^t \gamma(a_0 + s, r)i_N(a_0 + s, s)ds\right)$$

Preuve

Ce lemme provient du faite que l'on a

$$\mathbb{E}\left(P_1\left(\int_0^t \lambda(a_0 + s, s)s_N(a_0 + s, s)ds\right) - P_1\left(\int_0^r \lambda(a_0 + s, s)s_N(a_0 + s, s)ds\right) \middle| \mathcal{F}_r^{a_0}\right)$$

$$= \mathbb{E} \left(\int_r^t \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds | \mathcal{F}_r^{a_0} \right)$$

Maintenant nous allons établir cette égalité.

Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u \leq t$, on pose

$$[u]_n = \begin{cases} u & , \text{ si } u \leq r \\ r + \frac{k}{n}(t - r), & \text{ si } r + \frac{k}{n}(t - r) \leq u < r + \frac{k+1}{n}(t - r), \end{cases} \quad (3.5)$$

et

$$A_n^{a_0}(t) = N \int_0^t \lambda(a_0 + [u]_n, [u]_n) s_N(a_0 + [u]_n, [u]_n) du$$

$$B_n^{a_0}(t) = N \int_0^t \gamma(a_0 + [u]_n, [u]_n) i_N(a_0 + [u]_n, [u]_n) du$$

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ si $a < b$, alors on pose $P_i((a, b] = P_i(b) - P_i(a)$ et

$u_k = r + \frac{k}{n}(t - r)$ avec $i = 1; 2$ et on a :

$$\begin{aligned} & P_1(A_n^{a_0}(t)) - P_1(A_n^{a_0}(r)) = P_1(A_n^{a_0}(r), A_n^{a_0}(t)) = \\ & P_1 \left(N \int_0^r \lambda(a_0 + [u]_n, [u]_n) s_N(a_0 + [u]_n, [u]_n) du, N \int_0^t \lambda(a_0 + [u]_n, [u]_n) s_N(a_0 + [u]_n, [u]_n) du \right) \\ & P_1 \left(\left(N \int_0^r \lambda(a_0 + [u]_n, [u]_n) s_N(a_0 + [u]_n, [u]_n) du, N \int_0^r \lambda(a_0 + [u]_n, [u]_n) s_N(a_0 + [u]_n, [u]_n) du \right) \right. \\ & \quad \left. + N \int_r^t \lambda(a_0 + [u]_n, [u]_n) s_N(a_0 + [u]_n, [u]_n) du \right) \end{aligned}$$

En appliquant la somme de Riemann on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n P_1 \left(N \int_0^{u_{k-1}} \lambda(a_0 + [u]_n, [u]_n) s_N(a_0 + [u]_n, [u]_n) du, \right. \\ & \quad \left. N \int_0^{u_{k-1}} \lambda(a_0 + [u]_n, [u]_n) s_N(a_0 + [u]_n, [u]_n) du + \right. \\ & \quad \left. N \frac{t-r}{n} \lambda\left(a_0+r+\frac{(k-1)(t-r)}{n}, r+\frac{(k-1)(t-r)}{n}\right) s_N\left(a_0+r+\frac{(k-1)(t-r)}{n}, r+\frac{(k-1)(t-r)}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

$$P_1(A_n^{a_0}(t)) - P_1(A_n^{a_0}(r)) = P_1(A_n^{a_0}(r), A_n^{a_0}(t)) = \sum_{k=1}^n P_1(A_n^{a_0}(u_{k-1}), A_n^{a_0}(u_{k-1})) +$$

$$N \frac{t-r}{n} \lambda(a_0 + u_{k-1}, u_{k-1}) s_N(a_0 + u_{k-1}, u_{k-1}).$$

Donc

$$P_1(A_n^{a_0}(r), A_n^{a_0}(t)) = \sum_{k=1}^n P_1(A_n^{a_0}(u_{k-1}), A_n^{a_0}(u_{k-1})) + N \frac{t-r}{n} \lambda(a_0 + u_{k-1}, u_{k-1}) s_N(a_0 + u_{k-1}, u_{k-1}).$$

$$P_1(A_n^{a_0}(r), A_n^{a_0}(t)) = \sum_{k=1}^n P_1(A_n^{a_0}(u_{k-1}), A_n^{a_0}(u_k)).$$

$$\mathbb{E}(P_1(A_n^{a_0}(t)) - P_1(A_n^{a_0}(r)) | \mathcal{F}_r^{a_0}) = \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(P_1(A_n^{a_0}(u_{k-1}), A_n^{a_0}(u_k)) | \mathcal{F}_{u_{k-1}}^{a_0} | \mathcal{F}_r^{a_0}) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E} (P_1(A_n^{a_0}(u_{k-1}), A_n^{a_0}(u_{k-1}) + \frac{t-r}{n} \lambda(a_0 + u_{k-1}, u_{k-1}) s_N(a_0 + u_{k-1}, u_{k-1})) | \mathcal{F}_r^{a_0}) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{t-r}{n} \lambda(a_0 + u_{k-1}, u_{k-1}) s_N(a_0 + u_{k-1}, u_{k-1}) \right) | \mathcal{F}_r^{a_0} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E} (P_1(A_n^{a_0}(u_k)) - P_1(A_n^{a_0}(u_{k-1}))) | \mathcal{F}_{u_{k-1}}^{a_0} | \mathcal{F}_r^{a_0} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E} (P_1(A_n^{a_0}(u_k)) - P_1(A_n^{a_0}(u_{k-1}))) | \mathcal{F}_r^{a_0} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n (A_n^{a_0}(u_k) - A_n^{a_0}(u_{k-1})) | \mathcal{F}_r^{a_0} \right)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}(P_1(A_n^{a_0}(t)) - P_1(A_n^{a_0}(r)) | \mathcal{F}_r^{a_0}) = \mathbb{E}(A_n(t) - A_n(r) | \mathcal{F}_r^{a_0})$$

En faisant tendre n vers l'infini on obtient le résultat.

Par les propriétés de martingales

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_N^{a_0}(t)) = \mathbb{E}(\mathcal{M}_N^{a_0}(0)) = 0.$$

Maintenant nous allons nous intéresser à l'expression de $\mathbb{E}(|\mathcal{M}_N^{a_0}(t)|^2)$.

Pour tout $t > 0$, pour tout entier naturel $n \geq t$ et pour tout $0 \leq i \leq n$

on pose $t_i = \frac{it}{n}$. $\forall i = 1, \dots, n$ on a :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$$

une discrétisation de l'intervalle $[0; t]$.

$$|\mathcal{M}_N^{a_0}(t)|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} |\mathcal{M}_N^{a_0}(t_{i+1}) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t_i)|^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} (\mathcal{M}_N^{a_0}(t_{i+1}) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t_i)) (\mathcal{M}_N^{a_0}(t_{j+1}) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t_j))$$

$$\mathbb{E}(|\mathcal{M}_N^{a_0}(t)|^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(|\mathcal{M}_N^{a_0}(t_{i+1}) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t_i)|^2)$$

Car

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_N^{a_0}(t_{i+1}) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t_i)) = \mathbb{E}(\mathcal{M}_N^{a_0}(t_{j+1}) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t_j)) = 0 \text{ et}$$

$\mathcal{M}_N^{a_0}(t_{i+1}) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t_i)$ est indépendante de $\mathcal{M}_N^{a_0}(t_{j+1}) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t_j)$ pour $i \neq j$.

Quand $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\mathcal{M}_N^{a_0}(t_{i+1}) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t_i)|^2 \rightarrow \sum_{0 \leq r \leq t} |\Delta \mathcal{M}_N(r)|^2.$$

Où $\Delta \mathcal{M}_N(r)$ désigne les sauts du processus \mathcal{M}_N à la date r .

Donc

$$\mathbb{E}(|\mathcal{M}_N^{a_0}(t)|^2) = \mathbb{E} \left(\sum_{0 \leq r \leq t} |\Delta \mathcal{M}_N(r)|^2 \right).$$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_N^{a_0}(t_{i+1}) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t_i)|^2 &= \left| \frac{1}{N} M_1 \left(\int_0^{t_{i+1}} N \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{N} M_1 \int_0^{t_i} \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right|^2 \\
&\leq \frac{1}{N^2} \left(P_1 \left(N \int_0^{t_{i+1}} \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right) - P_1 \left(N \int_0^{t_i} \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^{t_{i+1}} \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds - \int_0^{t_i} \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right) \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{N^2} |(P_N(t_{i+1}) - P_N(t_i))|^2 + (t_{i+1} - t_i)^2 \left(\sup_{(a_0, t) \in \mathbb{R} \times [0, \omega]} \lambda(a_0 + t, t) \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{N^2} |(P_N(t_{i+1}) - P_N(t_i))|^2 + (t_{i+1} - t_i) (\lambda^*)^2. \quad \text{car } t_{i+1} - t_i \leq 1
\end{aligned}$$

Avec

$$P_N(t_i) = \frac{1}{N} M_1 \left(\int_0^{t_i} \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right)$$

Ainsi

$$|\mathcal{M}_N^{a_0}(t_{i+1}) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t_i)|^2 \leq \frac{1}{N^2} |(P_N(t_{i+1}) - P_N(t_i))|^2 + (t_{i+1} - t_i) (\lambda^*)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} |\mathcal{M}_N^{a_0}(t_{i+1}) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t_i)|^2 \leq \frac{1}{N^2} |P_N(\omega)|^2 + \omega (\lambda^*)^2 < +\infty$$

Donc $(\mathcal{M}_N^{a_0}(t))_{t \geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2 , donc $|\mathcal{M}_N^{a_0}(t)|^2$ uniformément intégrable.

Or

$$\sum_{0 \leq r \leq t} |\Delta \mathcal{M}_N(r)|^2 = \frac{1}{N^2} P_1 \left(N \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) i_N(a_0 + s, s) ds \right).$$

Cette égalité est justifiée par les propriétés de la martingale $\mathcal{M}_N(r)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\mathcal{M}_N^{a_0}(t)|^2) &= \mathbb{E} \left(\sum_{0 \leq r \leq t} |\Delta \mathcal{M}_N(r)|^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{N^2} P_1 \left(N \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) i_N(a_0 + s, s) ds \right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \mathbb{E} \left(\int_0^t \lambda(a_0 + s, s) i_N(a_0 + s, s) ds \right). \end{aligned}$$

Pour la martingale $(\mathcal{N}_N^{a_0}(t))_{t \geq 0}$ le raisonnement est le même et que

$$\mathbb{E}(|\mathcal{N}_N^{a_0}(t)|^2) = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left(\int_0^t \gamma(a_0 + s, s) i_N(a_0 + s, s) ds \right)$$

■

Maintenant nous allons énoncer une proposition qui sera utilisée dans la suite.

Proposition 3.1 .[2] Soit $(P(t))_{t \geq 0}$ un processus de poisson d'intensité $\lambda >$

0. Alors

$$\frac{P(t)}{t} \rightarrow \lambda \quad p.s \quad t \rightarrow +\infty.$$

Preuve

Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{P(n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P(i) - P(i-1)) \rightarrow \lambda, \quad n \rightarrow +\infty$$

Car $\forall 1 \leq i \leq n$, $P(i) - P(i-1)$ est de loi de poisson de paramètre λ .

Pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{P(t)}{t} &= \frac{[t][t]^{-1}}{t} \left(P([t]) + \frac{1}{t}(P(t) - P([t])) \right) \\ \left| \frac{P(t)}{t} - \lambda \right| &\leq \left| \frac{[t][t]^{-1}}{t} (P([t]) - \lambda) \right| + \left(\frac{1}{t} (P([t] + 1) - P([t])) \right) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{t} (P([t] + 1) - P([t])) \right) = \frac{1}{t} P([t] + 1) - \frac{1}{t} P([t]) \rightarrow \lambda - \lambda = 0 \quad t \rightarrow +\infty$$

De même

$$\left| \frac{[t][t]^{-1}}{t} (P([t]) - \lambda) \right| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 3.1 *Pour tout $\omega > 0$ quand $N \rightarrow +\infty$*

$$\sup_{0 \leq t \leq \omega} \{ |\mathcal{M}_N^{a_0}(t)| + |\mathcal{N}_N^{a_0}(t)| \} \rightarrow 0$$

en probabilité.

Proposition 3.2 *Pour tout $\omega > 0$ quand $N \rightarrow +\infty$*

$$\sup_{0 \leq t \leq \omega} \{|\mathcal{M}_N^{a_0}(t)| + |\mathcal{N}_N^{a_0}(t)|\} \rightarrow 0$$

presque sûrement p.s.

Preuve

On considère les termes $\mathcal{M}_N^{a_0}$ et $\mathcal{N}_N^{a_0}$. Quand

$$\gamma(a_0 + t)s_N(a_0 + t, t), \quad \lambda(a_0 + t, t)i_N(a_0 + t, t)$$

prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[0; 1]$,

On a

$$\mathcal{M}_1(t) = \frac{1}{N} M \left(N \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right)$$

Posons

$$r = N \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \leq \int_0^t N \lambda^* ds$$

$$|\mathcal{M}_1^{a_0}(t)| = \frac{1}{N} |M_1(r)|$$

$$\sup_{0 \leq t \leq \omega} |\mathcal{M}_1^{a_0}(t)| \leq \frac{1}{N} \sup_{0 \leq r \leq N \lambda^* t} |M_1(r)|$$

en particulier pour $t = \omega$ on a :

$$\sup_{0 \leq t \leq \omega} |\mathcal{M}_N^{a_0}(t)| \leq \frac{1}{N} \sup_{0 \leq r \leq \lambda^* N \omega} |M_1(r)|, \quad \sup_{0 \leq t \leq \omega} |\mathcal{N}_N^{a_0}(t)| \leq \frac{1}{N} \sup_{0 \leq r \leq \gamma^* N \omega} |M_2(r)|$$

En appliquant la loi des grands nombres pour les processus de poisson on obtient :

$$\forall t > 0, \quad \frac{P_1(Nt)}{N} \rightarrow t, \quad \frac{P_1(Nt)}{N} \rightarrow t, \quad N \rightarrow +\infty$$

Nous avons une suite de fonctions croissantes qui converge vers une fonction continue, par conséquent par le deuxième théorème de Dini, la convergence est uniforme sur tout intervalle compact de \mathbb{R} .

$$\forall \omega > 0, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sup_{0 \leq r \leq \lambda N \omega} |M_1(r)| = 0.$$

Et

$$\forall \omega > 0, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sup_{0 \leq r \leq \gamma N \omega} |M_2(r)| = 0$$

D'où le résultat. ■

Théorème 3.1 *Loi des Grands Nombres*

Si $(s_N(a_0, 0); i_N(a_0, 0)) \rightarrow (s_0^{a_0}; i_0^{a_0})$ quand $N \rightarrow +\infty$, alors

$$\sup_{(t, a_0) \in [0; \omega] \times \mathbb{R}} \{|s_N(a_0 + t, t) - s(a_0 + t, t)| + |i_N(a_0 + t, t) - i(a_0 + t, t)|\} \rightarrow 0$$

quand $N \rightarrow +\infty$

où $\{(s(a_0 + t, t), i(a_0 + t, t)); t \geq 0\}$ résout l'EDP

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \right) s(a, t) = -\lambda(a, t)s(a, t) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \right) i(a, t) = \lambda(a, t)s(a, t) - \gamma(a, t)i(a, t) \\ s(a_0, 0) = s_0^{a_0}, \quad i(a_0, 0) = i_0^{a_0} \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Preuve

Posons $X(a_0 + t, t) = \begin{pmatrix} s(a_0 + t, t) \\ i(a_0 + t, t) \end{pmatrix}$; $X_N(a_0 + t, t) = \begin{pmatrix} s_N(a_0 + t, t) \\ i_N(a_0 + t, t) \end{pmatrix}$

$$\bar{X}_N(a_0 + t, t) = X(a_0 + t, t) - X_N(a_0 + t, t)$$

$$Y_N(a_0 + t, t) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_N^{a_0}(t) \\ \mathcal{N}_N^{a_0}(t) - \mathcal{M}_N^{a_0}(t) \end{pmatrix}$$

et finalement

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x \\ \lambda x - \gamma y \end{pmatrix}.$$

Pout tout $0 \leq x, y, x', y' \leq 1$ on a

$$\left\| F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - F \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\| \leq C(\lambda, \gamma) \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\|$$

où $C(\lambda, \gamma) = \max\{2\lambda^*, \gamma^*\}$

$$\bar{X}_N(a_0+t, t) = X_N(a_0, 0) + \int_0^t [F(X(a_0+r, r)) - F(X_N(a_0+r, r))]dr + Y_N(a_0+t, t).$$

D'après la proposition précédente :

$\forall \omega > 0$

$$\sup_{(a_0+t, t) \in \mathbb{R} \times [0; \omega]} \|Y_N(a_0+t, t)\| \rightarrow 0$$

quand $N \rightarrow +\infty$.

Soit

$$\varepsilon_N^{a_0}(t) = \sup_{(a_0+t, t) \in \mathbb{R} \times [0; \omega]} \|Y_N(a_0+t, t)\|,$$

On a :

$$\|\bar{X}_N(a_0+t, t)\| \leq \|X_N(a_0, 0)\| + C(\lambda, \gamma) \int_0^t \|\bar{X}_N(a_0+r, r)\|dr + \varepsilon_N^{a_0}(t)$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on parvient à

$$\sup_{(a_0+t, t) \in \mathbb{R} \times [0; \omega]} \|\bar{X}_N(a_0+t, t)\| \leq (\|X_N(a_0, 0)\| + \varepsilon_N^{a_0}(t)) e^{C(\lambda, \gamma)t}$$

Et quand $N \rightarrow +\infty$, $\|X_N(a_0, 0)\| \rightarrow 0$, $\varepsilon_N^{a_0}(t) \rightarrow 0$ et le résultat en découle. ■

3.2.2 Théorème Centrale Limite

On écrit (s_N, i_N) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_N(a_0 + t, t) = s(a_0 + t, t) + \frac{1}{\sqrt{N}}U_N(a_0 + t, t) \\ i_N(a_0 + t, t) = i(a_0 + t, t) + \frac{1}{\sqrt{N}}V_N(a_0 + t, t) \end{array} \right.$$

D'où le système

$$\left\{ \begin{array}{l}
 s(a_0 + t, t) + \frac{1}{\sqrt{N}} U_N(a_0 + t, t) = s(a_0, 0) - \\
 \frac{1}{N} M_1 \left(N \int_0^t (\lambda(a_0 + r, r) s(a_0 + r, r) + \frac{\lambda(a_0+r,r) U_N(a_0+r,r)}{\sqrt{N}}) dr \right) - \\
 \int_0^t \left(\lambda(a_0 + r, r) s(a_0 + r, r) + \frac{\lambda(a_0+r,r) U_N(a_0+r,r)}{\sqrt{N}} \right) dr \\
 \\
 i(a_0 + t, t) + \frac{1}{\sqrt{N}} V_N(a_0 + t, t) = i(a_0, 0) + \\
 \frac{1}{N} M_1 \left(N \int_0^t (\lambda(a_0 + r, r) s(a_0 + r, r) + \frac{\lambda(a_0+r,r) U_N(a_0+r,r)}{\sqrt{N}}) dr \right) - \\
 \frac{1}{N} M_2 \left(N \int_0^t (\gamma(a_0 + t, t) i(a_0 + r, r) + \frac{\gamma(a_0+r,r) V_N(a_0+r,r)}{\sqrt{N}}) dr \right) - \\
 + \int_0^t \left(\lambda(a_0 + r, r) s(a_0 + r, r) + \frac{\lambda(a_0+r,r) U_N(a_0+r,r)}{\sqrt{N}} \right) dr - \\
 \int_0^t \left(\gamma(a_0 + t, t) i(a_0 + r, r) + \frac{\gamma(a_0+r,r) V_N(a_0+r,r)}{\sqrt{N}} \right) dr
 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

D'après le système 3.10 on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l}
 U_N(a_0 + t, t) = \frac{-1}{\sqrt{N}} M_1 \left(N \int_0^t \left(\lambda(a_0 + r, r) s(a_0 + r, r) + \frac{\lambda(a_0 + r, r) U_N(a_0 + r, r)}{\sqrt{N}} \right) dr \right) - \\
 \int_0^t \lambda(a_0 + r, r) U_N(a_0 + r, r) dr \\
 V_N(a_0 + t, t) = \frac{1}{\sqrt{N}} M_1 \left(N \int_0^t \left(\lambda(a_0 + r, r) s(a_0 + r, r) + \frac{\lambda(a_0 + r, r) U_N(a_0 + r, r)}{\sqrt{N}} \right) dr \right) - \\
 \frac{1}{\sqrt{N}} M_2 \left(N \int_0^t \left(\gamma(a_0 + r, r) i(a_0 + r, r) + \frac{\gamma(a_0 + r, r) V_N(a_0 + r, r)}{\sqrt{N}} \right) dr \right) + \\
 \int_0^t (\lambda(a_0 + r, r) U_N(a_0 + r, r)) - \int_0^t (\gamma(a_0 + r, r) V_N(a_0 + r, r)) dr
 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Posons

$$\mathcal{M}_1^{N, a_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} M_1 \left(N \int_0^t \left(\lambda(a_0 + r, r) s(a_0 + r, r) + \frac{\lambda(a_0 + r, r) U_N(a_0 + r, r)}{\sqrt{N}} \right) dr \right)$$

et

$$\mathcal{M}_2^{N, a_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} M_1 \left(N \int_0^t \left(\gamma(a_0 + r, r) s(a_0 + r, r) + \frac{\gamma(a_0 + r, r) V_N(a_0 + r, r)}{\sqrt{N}} \right) dr \right)$$

deux martingales par rapport à la filtration

$$\mathcal{F}_t^{a_0} = \sigma \{ \gamma(a_0 + r, r) i_N(a_0 + r, r), \lambda(a_0 + r, r) s_N(a_0 + r, r) : 0 \leq r \leq t \}.$$

On note

$[\mathcal{M}_1^{N,a_0}]_t = \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta \mathcal{M}_1(s)|^2$ la somme des carrés des sauts de la martingale $(\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t))_{t \geq 0}$.

On défint

$$[\mathcal{M}_1^{N,a_0}]_t = \frac{1}{N} P_1 \left(N \int_0^t \left(\lambda(a_0 + r, r) s(a_0 + r, r) + \frac{\lambda(a_0 + r, r) U_N(a_0 + r, r)}{\sqrt{N}} \right) dr \right)$$

$$[\mathcal{M}_2^{N,a_0}]_t = \frac{1}{N} P_2 \left(N \int_0^t \left(\gamma(a_0 + r, r) s(a_0 + r, r) + \frac{\gamma(a_0 + r, r) V_N(a_0 + r, r)}{\sqrt{N}} \right) dr \right).$$

De même on définit

$$\langle \mathcal{M}_1^{N,a_0} \rangle_t = \int_0^t \left(\lambda(a_0 + r, r) s(a_0 + r, r) + \frac{\lambda(a_0 + r, r) U_N(a_0 + r, r)}{\sqrt{N}} \right) dr$$

$$\langle \mathcal{M}_2^{N,a_0} \rangle_t = \int_0^t \left(\gamma(a_0 + r, r) s(a_0 + r, r) + \frac{\gamma(a_0 + r, r) V_N(a_0 + r, r)}{\sqrt{N}} \right) dr$$

Maintenant nous allons nous intéresser au fait que $(\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t))_{t \geq 0}$ et $(\mathcal{M}_2^{N,a_0}(t))_{t \geq 0}$ soient deux martingales bornées dans L^1 .

Il n'est pas difficile de voir que $|U_N(a_0 + t, t)| \leq 2\sqrt{N}$ et $|V_N(a_0 + t, t)| \leq 2\sqrt{N}$. Comme $(\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t))_{t \geq 0}$ est une martingale qui vérifie

$$\mathbb{E} \left(\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t) \right) = \mathbb{E} \left(\mathcal{M}_1^{N,a_0}(0) \right) = 0.$$

Alors

$$\mathbb{E} \left(\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t) \right)^2 = \mathbb{E}(\langle \mathcal{M}_1^{N,a_0}(t) \rangle) \leq 3\lambda^*t.$$

De même

$$\mathbb{E} \left(\mathcal{M}_2^{N,a_0}(t) \right)^2 = \mathbb{E}(\langle \mathcal{M}_2^{N,a_0}(t) \rangle) \leq 3\gamma^*t.$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E} \left(\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t) \right) \leq \sqrt{3\lambda^*t}; \quad \mathbb{E} \left(\mathcal{M}_2^{N,a_0}(t) \right) \leq \sqrt{3\gamma^*t}.$$

En appliquant le lemme de Gronwall on a :

$$\begin{aligned} U_N(a_0 + t, t) &\leq |\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t)| + \lambda^* \int_0^t |U_N(a_0 + r, r) dr \\ &\leq |\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t)| e^{\lambda^*t} \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{N \geq 1; 0 \leq t \leq \omega; a_0 \in \mathbb{R}} U_N(a_0 + t, t) \leq \sup_{N \geq 1; 0 \leq t \leq \omega; a_0 \in \mathbb{R}} |\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t)| e^{\lambda^*t}$$

et

$$\mathbb{E}(U_N(a_0 + t, t)) \leq 3\lambda^* \omega e^{\lambda^* \omega}$$

$$\begin{aligned} V_N(a_0 + t, t) &\leq |\mathcal{M}_1^{N, a_0}(t)| + |\mathcal{M}_2^{N, a_0}(t)| + \lambda^* \int_0^t |U_N(a_0 + r, r) dr + \\ &\quad \cdot \gamma^* \int_0^t |V_N(a_0 + r, r) dr \\ &\leq |\mathcal{M}_1^{N, a_0}(t)| e^{\lambda^* t} + |\mathcal{M}_2^{N, a_0}(t)| e^{\gamma^* t} \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}(V_N(a_0 + t, t)) \leq 3\lambda^* \omega e^{\lambda^* \omega} + 3\gamma^* \omega e^{\gamma^* \omega}$$

On a

$$|U_N(a_0 + t, t)| + |V_N(a_0 + t, t)| \leq 2|\mathcal{M}_1^{N, a_0}(t)| e^{\lambda t} + |\mathcal{M}_2^{N, a_0}(t)| e^{\gamma t}$$

Donc

$$\mathbb{E}(|U_N(a_0 + t, t)| + |V_N(a_0 + t, t)|) \leq 6\lambda^* \omega e^{\lambda^* \omega} + 2\gamma^* \omega e^{\gamma^* \omega}.$$

Posons

$$C_1(\lambda, \gamma, \omega) = 6\lambda^*\omega e^{\lambda t} + 2\gamma^*\omega e^{\gamma^*t}.$$

Alors,

$$\mathbb{E} (|U_N(a_0 + t, t)| + |V_N(a_0 + t, t)|) \leq C_1(\lambda, \gamma, \omega).$$

Par suite

$$\sup_{N \geq 1; 0 \leq t \leq \omega; a_0 \in \mathbb{R}} \mathbb{E} (|U_N(a_0 + t, t)| + |V_N(a_0 + t, t)|) \leq C_1(\lambda, \gamma, \omega).$$

De plus posons

$$C_2(\lambda, \gamma, \omega) = C_1(\lambda, \gamma, \omega)^2$$

$$\sup_{N \geq 1; 0 \leq t \leq \omega; a_0 \in \mathbb{R}} \mathbb{E} (|U_N(a_0 + t, t)|^2 + |V_N(a_0 + t, t)|^2) \leq C_2(\lambda, \gamma, \omega).$$

Lemme 3.2 $\forall \omega > 0$, si λ et γ sont bornés, alors

$$\sup_{N \geq 1} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq \omega} [|U_N(a_0 + t, t)|^2 + |V_N(a_0 + t, t)|^2] \right) < \infty$$

Preuve

$$\forall t \geq 0, U_N(a_0 + t, t) \leq |\mathcal{M}_1^{N, a_0}| e^{\lambda^* t}.$$

$$\text{Donc } U_N^2(a_0 + t, t) \leq |\mathcal{M}_1^{N, a_0}|^2 e^{2\lambda^* t}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \sup_{0 \leq r \leq t} \{U_N^2(a_0 + t, t) : a_0 \in \mathbb{R}\} &\leq |\mathcal{M}_1^{N, a_0}|^2 e^{2\lambda^* t} \\
 \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq r \leq t} (U_N^2(a_0 + t, t)) \right) &\leq \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq r \leq t} \{|\mathcal{M}_1^{N, a_0}(r)|^2 e^{2\lambda^* r} : a_0 \in \mathbb{R}\} \right) \\
 &\leq e^{2\lambda^* t} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq r \leq t} \{|\mathcal{M}_1^{N, a_0}(r)|^2 : a_0 \in \mathbb{R}\} \right) \\
 &\leq e^{2\lambda^* t} \times 4\mathbb{E} \left(\langle \mathcal{M}_1^{N, a_0} \rangle_t \right) \\
 &\leq 6\lambda^* t e^{2\lambda^* t}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq r \leq \omega} \{U_N^2(a_0 + t, t) : a_0 \in \mathbb{R}\} \right) \leq 6\lambda^* \omega e^{2\lambda^* \omega} < \infty \quad (3.12)$$

De même

$$V_N^2(a_0 + t, t) \leq |\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t)|^2 e^{2\lambda^* t} + 2|\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t)| |\mathcal{M}_2^{N,a_0}(t)| e^{(\lambda^* + \gamma^*) t} + |\mathcal{M}_2^{N,a_0}(t)|^2 e^{2\gamma r}$$

$$\begin{aligned} \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} V_N^2(a_0 + r, r) &\leq \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} |\mathcal{M}_1^{N,a_0}(r)|^2 e^{2\lambda^* r} + \\ &2 \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} |\mathcal{M}_1^{N,a_0}(r)| \times \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} |\mathcal{M}_2^{N,a_0}(r)| e^{(\lambda^* + \gamma^*) r} \\ &+ \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} |\mathcal{M}_2^{N,a_0}(r)|^2 e^{2\gamma r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} V_N^2(a_0 + r, r) &\leq \mathbb{E} \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} |\mathcal{M}_1^{N,a_0}(r)|^2 e^{2\lambda^* r} + \\ &2\mathbb{E} \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} |\mathcal{M}_1^{N,a_0}(r)| \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} |\mathcal{M}_2^{N,a_0}(r)| e^{(\lambda^* + \gamma^*) r} + \\ &\mathbb{E} \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} |\mathcal{M}_2^{N,a_0}(r)|^2 e^{2\gamma r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} V_N^2(a_0 + r, r) &\leq \mathbb{E} \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} |\mathcal{M}_1^{N,a_0}(r)|^2 e^{2\lambda^* r} + \\ &\left(\mathbb{E} \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} |\mathcal{M}_1^{N,a_0}(r)|^2 + \mathbb{E} \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} |\mathcal{M}_2^{N,a_0}(r)|^2 \right) \\ &\times e^{(\lambda^* + \gamma^*) r} + \mathbb{E} \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} |\mathcal{M}_2^{N,a_0}(r)|^2 e^{2\gamma r} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E} \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; t]} V_N^2(a_0 + r, r) \leq 12\lambda^* t e^{\lambda^*} + (12\lambda^* t + 12\gamma^* t) e^{(\lambda^* + \gamma^*) t} + 12\gamma^* t e^{2\gamma^* t}$$

Donc

$$\mathbb{E} \left(\sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; \omega]} V_N^2(a_0 + r, r) \right) \leq 12\lambda^* \omega e^{\lambda^*} + (12\lambda^* \omega + 12\gamma^* \omega) e^{(\lambda^* + \gamma^*) \omega} + 12\gamma^* \omega e^{2\gamma^* \omega} < \infty. \quad (3.13)$$

Par conséquent

$$\sup_{N \geq 1} \left(\mathbb{E} \left(\sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; \omega]} U_N^2(a_0 + r, r) + \sup_{(a_0, r) \in \mathbb{R} \times [0; \omega]} V_N^2(a_0 + r, r) \right) \right) < \infty.$$

D'où le résultat. ■

D'après le lemme 3.2, le processus $(U_N(t), V_N(t))_{t \geq 0}$ converge vers un processus $(U(t), V(t))_{t \geq 0}$ dans L^2 donc converge en loi.

Lemme 3.3 [2] *Soit $(P(t))_{t \geq 0}$ un processus de poisson standard.*

Soit $(M(t) = P(t) - t)_{t \geq 0}$ une martingale.

Alors pour toutes suites $(t_N)_{N \geq 1}$ de nombres réelles telles que $\frac{t_N}{\sqrt{N}} \rightarrow 0$,

quand

$N \rightarrow +\infty$, le processus

$$\left\{ \frac{M(Nt + \sqrt{N}t_N)}{\sqrt{N}}, t \geq 0 \right\} \rightarrow (B(t))_{t \geq 0}$$

où $B(t) \leftrightarrow \mathcal{N}(0; t)$

Preuve

Nous montrerons la convergence en loi fini dimensionnelle. En faite, il suffit

de prouver que pour tout $t > 0$ fixé

$$\frac{M(Nt + \sqrt{N}t_N)}{\sqrt{N}} \rightarrow B(t)$$

On a

$$\frac{M(Nt)}{\sqrt{[Nt]}} = \frac{1}{\sqrt{[Nt]}} \sum_{i=1}^{[Nt]} [M(i) - M(i-1)] + \frac{M(Nt) - M([Nt])}{\sqrt{[Nt]}}$$

Les variables aléatoires $M(i) - M(i-1)$ sont i.i.d. centrées de variance

1 . Le terme

$$\frac{M(Nt) - M([Nt])}{\sqrt{[Nt]}} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty.$$

La convergence ayant lieu en probabilité.

Par suite

$$\frac{M(Nt)}{\sqrt{[Nt]}} \rightarrow \mathcal{N}(0; 1), \quad N \rightarrow +\infty.$$

Par suite

$$\frac{M(Nt)}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{[Nt]}}{\sqrt{N}} \times \frac{M(Nt)}{\sqrt{[Nt]}} \Rightarrow B(t), \quad N \rightarrow +\infty.$$

$$\frac{M(Nt + \sqrt{N}t_N)}{\sqrt{N}} = \frac{M(Nt)}{\sqrt{N}} + \frac{M(Nt + \sqrt{N}t_N) - M(Nt)}{\sqrt{N}}$$

On a

$$\frac{M(Nt_N + \sqrt{N}T_N) - M(Nt)}{\sqrt{N}} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty$$

la convergence ayant lieu en probabilité. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left| \frac{M(Nt + \sqrt{N}t_N) - M(Nt)}{\sqrt{N}} > \varepsilon \right| \right) &\leq \frac{1}{N\varepsilon^2} \text{Var}(M(Nt + \sqrt{N}t_N) - M(Nt)) \\ &= \frac{\sqrt{N}t_N}{\varepsilon^2 N} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Car $\frac{t_N}{\sqrt{N}} \rightarrow 0$, $N \rightarrow +\infty$. ■

Proposition 3.3 [2] *Soit $(P(t))_{t \geq 0}$ un processus de poisson standard .*

Soit $M(t) = P(t) - t$. Alors pour toute suite $(t_N)_N$ de variables aléatoires réelles telle que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(t_N)}{\sqrt{N}} &\rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty, \\ \left\{ \frac{M(Nt + \sqrt{N}t_N) - M(Nt)}{\sqrt{N}}, t \geq 0 \right\} &\rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Preuve

Nous allons prouver le résultat pour t_N aléatoire. :

Nous allons montrer

$$\frac{M(Nt + \sqrt{N}t_N)}{\sqrt{N}} \rightarrow 0 \quad N \rightarrow +\infty.$$

La convergence ayant lieu en probabilité.

$$\mathbb{P} \left(\frac{|t_N|}{\sqrt{N}} > \eta \right) \leq \frac{1}{\eta} \frac{\mathbb{E}(|t_N|)}{\sqrt{N}}$$

Soit $\varepsilon \geq 0$ fixé. On a :

$$\left\{ \frac{|M(Nt + \sqrt{N}t_N) - M(Nt)|}{\sqrt{N}} > \varepsilon \right\} \subset \left\{ \frac{|M(Nt + \sqrt{N}t_N) - M(Nt)|}{\sqrt{N}} > \varepsilon \right\} \cap$$

$$\left\{ 0 \leq t_N \leq \eta\sqrt{N} \right\} \cup \left\{ \frac{|M(Nt + \sqrt{N}t_N) - M(Nt)|}{\sqrt{N}} > \varepsilon \right\} \cap$$

$$\left\{ -\eta\sqrt{N} \leq t_N \leq 0 \right\} \cup \left\{ \frac{|t_N|}{\sqrt{N}} > \eta \right\}$$

En utilisant inégalité de Doob et celle de Markov, on obtient :

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq N\eta} \frac{|M(Nt + s) - M(Nt)|}{\sqrt{N}} > \varepsilon \right) \leq \frac{4}{N\varepsilon^2} \mathbb{E} (|M(N(t + \eta)) - M(Nt)|^2)$$

$$\leq \frac{4\eta}{\varepsilon^2}$$

De plus

$$\mathbb{P} \left(\frac{|M(Nt + s) - M(Nt)|}{\sqrt{N}} > \varepsilon \right) \leq \frac{8\eta}{\varepsilon^2} + \frac{\mathbb{E}(|t_N|)}{\eta\sqrt{N}}$$

Posons

$$\eta = \frac{\varepsilon^3}{16}.$$

On obtient

$$\mathbb{P} \left(\frac{|M(Nt + s) - M(Nt)|}{\sqrt{N}} > \varepsilon \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{16\mathbb{E}(|t_N|)}{\varepsilon^3\sqrt{N}}.$$

Pour N assez grand que l'on veut

$$\frac{\mathbb{E}(|t_N|)}{\sqrt{N}} \leq \frac{\varepsilon^4}{32}.$$

Par suite

$$\mathbb{P} \left(\frac{|M(Nt + s) - M(Nt)|}{\sqrt{N}} > \varepsilon \right) \leq \varepsilon.$$

Ce qui achève la preuve en faisant tendre ε vers 0. ■

Maintenant déterminons la convergence en loi des processus

$$(\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t))_{t \geq 0}, \quad (\mathcal{M}_2^{N,a_0}(t))_{t \geq 0}.$$

en remplaçant M par M_1 et t par

$$\int_0^t (\lambda(a_0 + r, r)s(a_0 + r, r)) dr$$

dans le lemme 3.3, et en posant

$$t_N = \frac{\int_0^t \lambda(a_0 + r, r)U_N(a_0 + r, r)}{\sqrt{N}} dr.$$

D'après le lemme 3.3

$$\left\{ \mathcal{M}_1^{N,a_0}(t), t \geq 0 \right\} \rightarrow \left\{ B \left(\int_0^t (\lambda(a_0 + r, r)s(a_0 + r, r)) dr \right), t \geq 0 \right\} \quad (3.14)$$

De même

en remplaçant M par M_2 et t par

$$\int_0^t (\gamma(a_0 + r, r)i(a_0 + r, r)dr$$

dans le lemme 3.3, et en posant

$$t_N = \frac{\int_0^t \gamma(a_0 + r, r)V_N(a_0 + r, r)dr}{\sqrt{N}}.$$

D'après le lemme 3.3

$$\left\{ \mathcal{M}_2^{N, a_0}(t), t \geq 0 \right\} \rightarrow \left\{ B \left(\int_0^t (\gamma(a_0 + r, r)s(a_0 + r, r)dr \right), t \geq 0 \right\} \quad (3.15)$$

On considère $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$, $\forall k > 0$ une discrétisation de l'intervalle $[0; t]$. Pour tout $i = 0, 1, \dots, k$ les variables aléatoires $\mathcal{M}_1^{N, a_0}(t_i) - \mathcal{M}_1^{N, a_0}(t_{i-1})$ sont indépendantes. Alors le vecteur

$$\left(\mathcal{M}_1^{N, a_0}(t_1), \dots, \mathcal{M}_1^{N, a_0}(t_k) - \mathcal{M}_1^{N, a_0}(t_{k-1}) \right) \rightarrow$$

$$\left(B \left(\int_0^{t_1} (\lambda(a_0 + r, r)s(a_0 + r, r)dr \right), \dots, B \left(\int_0^{t_k} (\lambda(a_0 + r, r)s(a_0 + r, r)dr \right) - B \left(\int_0^{t_{k-1}} (\lambda(a_0 + r, r)s(a_0 + r, r)dr \right) \right)$$

quand $N \rightarrow +\infty$

De même

$\mathcal{M}_2^{N,a_0}(t_i) - \mathcal{M}_2^{N,a_0}(t_{i-1})$ sont indépendantes. Alors le vecteur

$$\left(\mathcal{M}_2^{N,a_0}(t_1), \dots, \mathcal{M}_1^{N,a_0}(t_k) - \mathcal{M}_2^{N,a_0}(t_{k-1}) \right) \rightarrow$$

$$\left(B \left(\int_0^{t_1} (\gamma(a_0 + r, r))i(a_0 + r, r)dr \right), \dots, B \left(\int_0^{t_k} (\gamma(a_0 + r, r))i(a_0 + r, r)dr \right) - \right. \\ \left. B \left(\int_0^{t_{k-1}} (\gamma(a_0 + r, r))i(a_0 + r, r)dr \right) \right)$$

quand $N \rightarrow +\infty$

Donc pour chaque processus $\left(\mathcal{M}_1^{N,a_0}(t) \right)_{t \geq 0}$ et $\left(\mathcal{M}_2^{N,a_0}(t) \right)_{t \geq 0}$, la loi finie dimensionnelle converge. Par conséquent le processus

$$(U_N(a_0 + t, t), V_N(a_0 + t, t))_{t \geq 0}$$

converge vers un processus

$$(U(a_0 + t, t), V(a_0 + t, t))_{t \geq 0}.$$

Où la limite satisfait

$$U(a_0+t, t) = - \int_0^t \lambda(a_0+r, r)U(a_0+r, r)dr - \int_0^t \sqrt{\lambda(a_0 + r, r)s(a_0 + r, r)}dB_1(r).$$

Et

$$V(a_0 + t, t) = \int_0^t \lambda(a_0 + r, r)U(a_0 + r, r)dr - \int_0^t \gamma(a_0 + r, r)V(a_0 + r, r)dr + \int_0^t \sqrt{\lambda(a_0 + r, r)s(a_0 + r, r)}dB_1(r) - \int_0^t \sqrt{\gamma(a_0 + r, r)i(a_0 + r, r)}dB_2(r).$$

De plus

le processus

$$(U(a_0 + t, t), V(a_0 + t, t))_{t \geq 0}$$

est un processus gaussien à trajectoire dans $C([0; +\infty[; \mathbb{R}^2)$.

Si les taux λ et γ deviennent constants

$$(U(a_0 + t, t), V(a_0 + t, t))_{t \geq 0}$$

devient la solution d'une équation de **Ornstein-Uhlenbeck** : C'est-à-dire

$U(a_0 + t, t)$ et $V(a_0 + t, t)$ sont des solutions d'une équations de la forme

$$dX_t = a'(b' - X_t)dt + \sigma'dB(t)$$

où $B(t)$ est un mouvement Brownien et a', b', σ' sont des nombres réels.

conclusion

Nous avons modélisé la propagation d'une épidémie dans une population de petite taille. Au cours de notre étude, nous avons appliqués la loi des grands nombres. Ce théorème pour les processus, montre que le modèle obtenu dans une population de petite taille converge vers le modèles déterministe.

De même, l'application du théorème de la limite centrale montre que le processus limite est un processus gaussien.

Chapitre 4

Simulations Numériques

Introduction

Nous savons déjà depuis le chapitre 2 que l'âge est une fonction du temps. Il est outre mesuré dans la même échelle que le temps. Dans ce chapitre, nous donnons quelques résultats de la simulation numérique du travail effectué. Au cours de nos simulation, il est question de montrer l'influence du facteur âge dans le modèle épidémiologiques. Ces résultats de la simulation vont nous aider à expliquer les modèles SIR structurées en âge.

Par ailleur l'objet de ces résultats est de montrer le comportement du système SIR au cours de son évolution dans le temps. Autrement dit, lorsque l'on agit sur l'âge a_0 des individus esposés à l'épidémiologie, le comportement du modèle reste identique?

A la fin du chapitre nous donnons la réponse à cette question.

4.1 Simulation du Modèle

La simulation en épidémiologie est un secteur en pleine expansion. Elle permet de prévoir le risque endémique. Elle est donc une aide à la décision pour les établissements sanitaires.

Définition 4.1 *La simulation se définit comme l'utilisation ou la résolution de modèles correspondant à un système donné pour étudier le comportement de ce dernier dans un contexte précis. La simulation est couramment utilisée comme outil d'aide à la décision dans le domaine des systèmes de production de biens, de services ou de santé.*

La Simulation est l'utilisation ou la résolution de modèles correspondant à un système donné pour étudier le comportement de ce dernier dans un contexte précis. Il s'agit de suivre une démarche.

Selon Drogoul (1993), la démarche de simulation passe par trois étapes distinctes : l'étape de modélisation, qui consiste à construire le modèle du phénomène à étudier, l'étape d'expérimentation, qui consiste à soumettre ce modèle à un certain type de variations, et l'étape de validation, qui consiste à confronter les données expérimentales obtenues avec le modèle à la réalité.

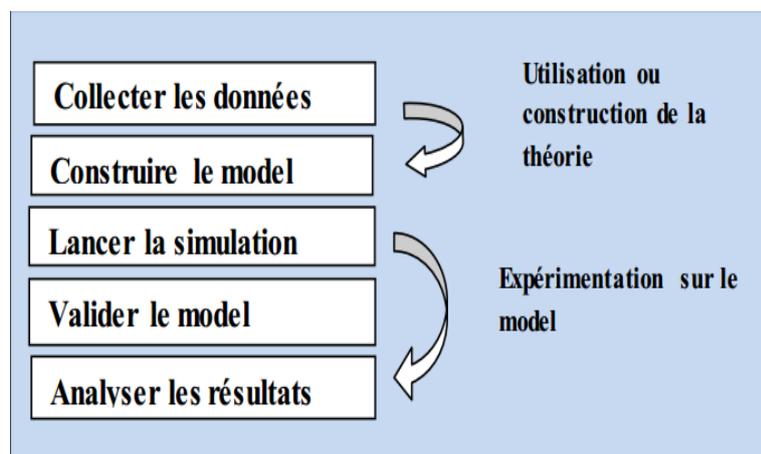


FIGURE 4.1 – Les étapes du processus de simulation Selon Drogoul

Dans cette section nous exploitons le logiciel R pour la simulation des processus qui décrivent l'évolution des systèmes d'équations . Notre choix du R est exprimé par les raisons suivants :

- la programmation facile,
- la continuité parmi les valeurs entières, réelles et complexes,
- la gamme étendue des nombres et leurs précisions,
- la bibliothèque mathématique très compréhensive,
- la possibilité de lier le code R avec les autres langages classiques de programmations.

Dans cette section, nous désignons par a_0 l'âge d'un individu au début de l'épidemie. Selon le chapitre 2 l'âge de cet individu évolut suivant la loi $a(t) = a_0 + t$ où $t \in [0, \omega]$.

Notre objectif ici est de voir la courbe de l'évolution de l'âge en fonction du temps. Pour cela, pour tout individu, on regarde son âge à partir du jour de sa naissance pour simplifier la simulation de l'âge . On prend l'origine du

temps le jour de la naissance de cet individu.

Donc $a_0 = 0$ et $t \in [0, a_M]$, a_M étant l'espérance de vie maximale de ce individu. Pour expérimentation, nous fixons $a_M = 100 \text{ ans}$.

Nous obtenons le résultat suivant :

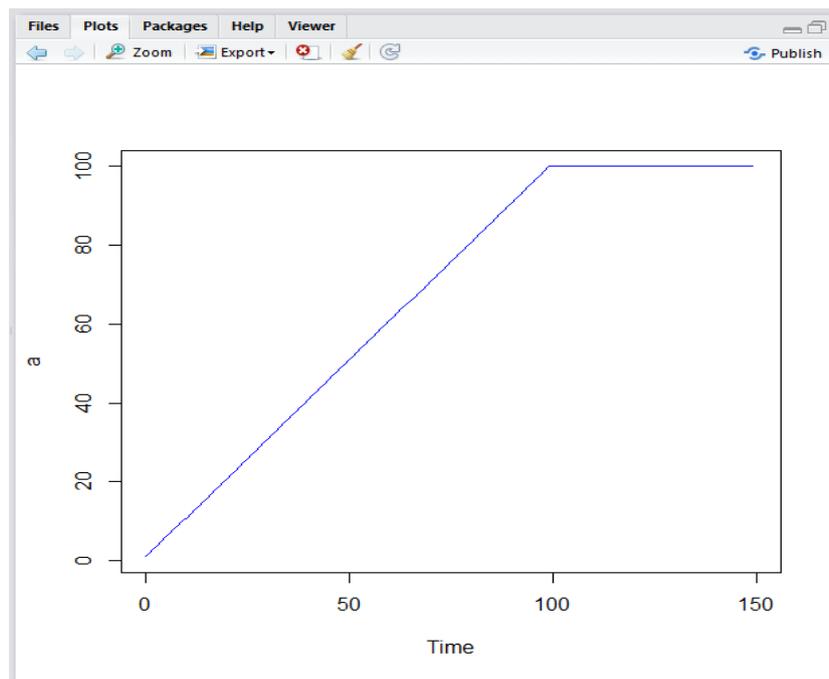


FIGURE 4.2 – Evolution de l'âge en fonction du temps

La courbe de l'évolution de l'âge croît sur l'intervalle $[0; 100]$ et atteint l'âge maximale $a_M = 100 \text{ ans}$. Lorsque nous sommes dans l'intervalle $[100; +\infty[$ l'âge reste constant et prend la valeur 100 ans .

La courbe nous montre l'évolution de l'âge d'un individu au fûre et à mesure que le temps passe. Lorsque cet individus atteint sa durée de vie maximale a_M il décède. A partir de cet instant, son âge n'évolue plus. Cela signifie que lorsqu'un individu atteint son expérience de vie maximale au cours d'une épidémiologie, il décède. Il est donc compté parmi les remis à partir de cet

instant a_M .

4.2 Force d'infection

Lorsqu'une épidémie se propage dans une région, le taux de contamination peut dépendre des aléas climatiques. Dans ces conditions, nous modélisons la force d'infection par une fonction périodique. Autrement dit, la force d'infection est la fonction suivante :

$$\lambda(a_0 + t, t) = \lambda_0(a_0) \left| \left(1 + \lambda_1(a_0) \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \arcsin \left(\frac{1}{\lambda_1(a_0)} \left(\frac{\lambda(a_0, 0)}{\lambda_0(a_0)} - 1 \right) \right) \right) \right) \right|.$$

$\lambda_0(a_0)$: Taux de transition de ligne de base en fonction de l'âge de naissance de l'individu.

$\lambda_1(a_0)$: Intensité de l'effet saisonnière en fonction de l'âge de naissance de l'individu.

T : Période de la tendance saisonnière.

Pour la simulation nous fixons :

$\lambda_0(a_0) = 0.2$, $\lambda_1(a_0) = 0.9$, $\lambda(a_0, 0) = 0.9$ et $T = 365$ jours. On obtient le résultat suivant :

La force d'infection varie sur une période de 365 jours. Sur l'intervalle de

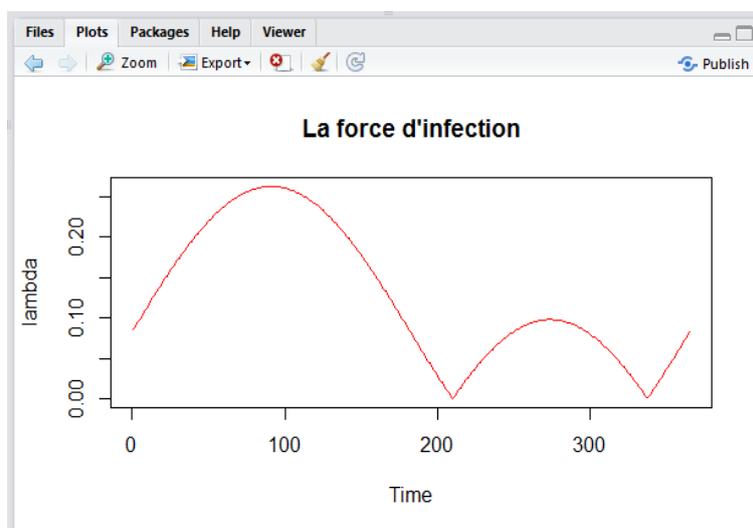


FIGURE 4.3 – Evolution de la force d'infection en fonction du temps.

temps $[0, 100]$, la force d'infection croit et atteint sa valeur maximale. Ainsi, le 100^{ieme} jour de l'année est le jour le plus critique, pour une telle épidémie. La plus part des individus sont infectés ce jour là.

Lorqu'une telle épidémie se propage dans une région, l'on doit prendre ces précautions avant le 100^{ieme} jours.

Par contre, entre le 100 et 200^{ieme} jour l'on observe la décroissance de la force d'infection. Après le 200^{ieme} jour, cette force d'infection continue sa décroissance s'annule, croit, décroît pour s'annuler et croit.

En effet, le nombre d'infectés diminue, après le 100^{ieme} jour. Le jour de l'annulité de la force d'infection est le jour le plus favorable. Ce jour aucun individu est infecté. Une observation de la courbe sur une période de 365 jours, présente deux jours favorables.

4.3 Taux de Guérison Décroissant

Lorsqu'une infection atteint un individu, il peut guérir ou décéder. Dans chacun de ces cas on dit qu'il devient remis. Nous supposons que les individus infectés ne meurt pas mais ils guérissent et que leur taux de guérisons dépend de leur âge, pour la simulation.

La prise en compte de l'âge dans le taux de guérison est expliquée par le faite que l'âge soit un facteur qui influence l'immunité. Cela a pour conséquence le taux de guérison élevé pour les jeunes et le taux de guérison faible pour les vieux.

Le taux de guérison est donc une fonction décroissante de l'âge. C'est ce que explique la courbe suivante :

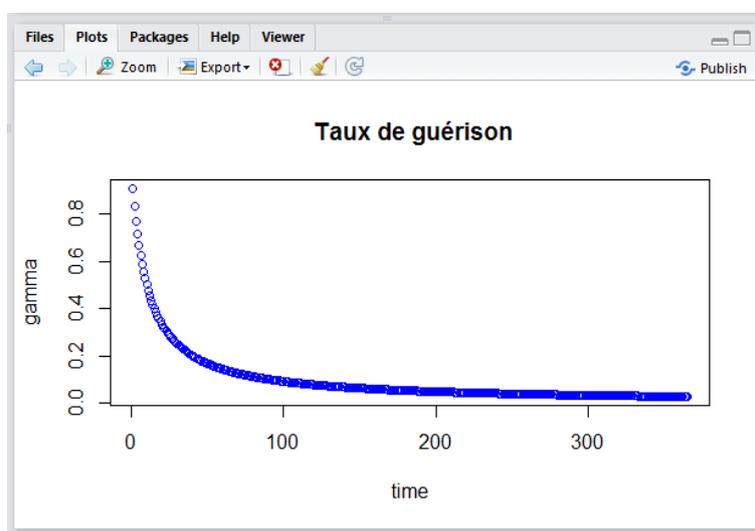


FIGURE 4.4 – Evolution du Taux de Guérison en fonction du temps.

A l'inverse, une bonne immunité est favorisée par un ensemble de facteurs : hygiène de vie saine, pratique régulière d'une activité physique, gestion du stress, sommeil réparateur, nutrition...

Celui ou celle qui pratique la majeure partie de ces facteurs peut avoir une immunité croissante en fonction de l'âge. Par conséquent, l'ensemble des individus de ce type a un taux de guérison croissant en fonction de l'âge. C'est ce taux que représente le graphique de la section suivante :

4.4 Taux de Guérison Croissante

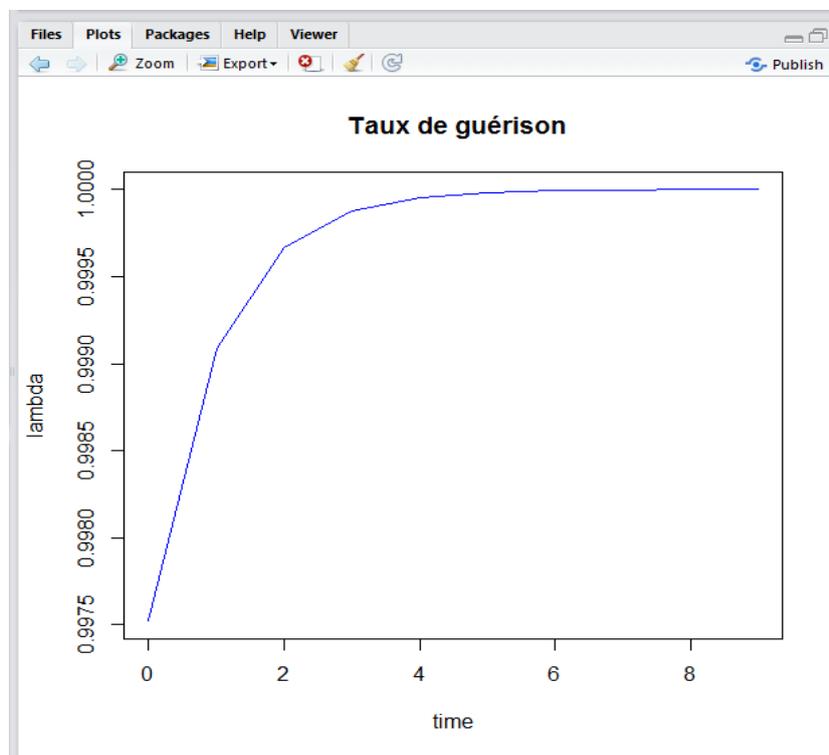


FIGURE 4.5 – Evolution du Taux de guérison en fonction de l'âge.

On considère le modèle déterministe *SIR*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) S(a, t) = -\lambda(a, t)S(a, t) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) I(a, t) = \lambda(a, t)S(a, t) - \gamma(a, t)I(a, t) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) R(a, t) = \gamma(a, t)I(a, t) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

ainsi que sa version stochastique.

$$\left\{ \begin{array}{l} s_N(t, a) = s_N(a_0, 0) - \frac{1}{N}P_1 \left(N \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right) \\ i_N(t, a) = i_N(a_0, 0) + \frac{1}{N}P_1 \left(N \int_0^t \lambda(a_0 + s, s) s_N(a_0 + s, s) ds \right) \\ - \frac{1}{N}P_2 \left(N \int_0^t \gamma(a_0 + s, s) i_N(a_0 + s, s) ds \right) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

En utilisant la fonction λ du taux d'infection et soit γ une fonction décroissante et bornée telle que $0 < \gamma \leq 1$. Pour la simulation on prend

$$\gamma(a_0 + t, t) = \frac{a_0}{a_0 + t}$$

$a_0 = 3650$ $\omega = T = 365$ jours, $S_0 = 99900$, $I_0 = 100$ $R_0 = 0$ donc $N = 100000$. $\lambda_0(a_0) = 0.2$, $\lambda_1(a_0) = 0.9$. En fixant $a_0 = 3650$ jours, la simulation du système conduit aux résultats suivant :

4.5. Courbe Représentative de la Variation du Nombre d'Individus de Chaque Compartiment

The screenshot shows a software interface with a 'Global Environment' window. The window contains a table of values for various variables. The variables and their corresponding values are as follows:

Variable	Value
a0	3650
dates	Large numeric (154972 elements, 1.2 Mb)
datesedp	num [1:3665] 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9...
gamma	Large numeric (154973 elements, 1.2 Mb)
gamma0	1
I	Large numeric (154972 elements, 1.2 Mb)
I0	100
Iedp	num [1:3665(1d)] 0.001 1.089 0.808 0.829 0.819 ...
lamb0	0.2
lamb1	0.9
lamba0	0.9
lambda	Large numeric (154973 elements, 1.2 Mb)
lambda0	0.9
MAX	99900
N	1e+05
nb	3665L
pas	0.1
R	Large numeric (154972 elements, 1.2 Mb)
Redp	num [1:3665(1d)] 0 0.0001 0.1089 0.1897 0.2724 ...
S	Large numeric (154972 elements, 1.2 Mb)
S0	99900
Sedp	num [1:3665(1d)] 0.999 0.909 0.901 0.893 0.885 ...
T	365
t	154973
tt	3665L
u	0L

FIGURE 4.6 – Tableau des valeurs.

4.5 Courbe Représentative de la Variation du Nombre d'Individus de Chaque Compartiment

En fixant $a_0 = 1825$ jours, soit 10 ans on obtient le graphique suivant :

4.5. Courbe Représentative de la Variation du Nombre d'Individus de Chaque Compartiment

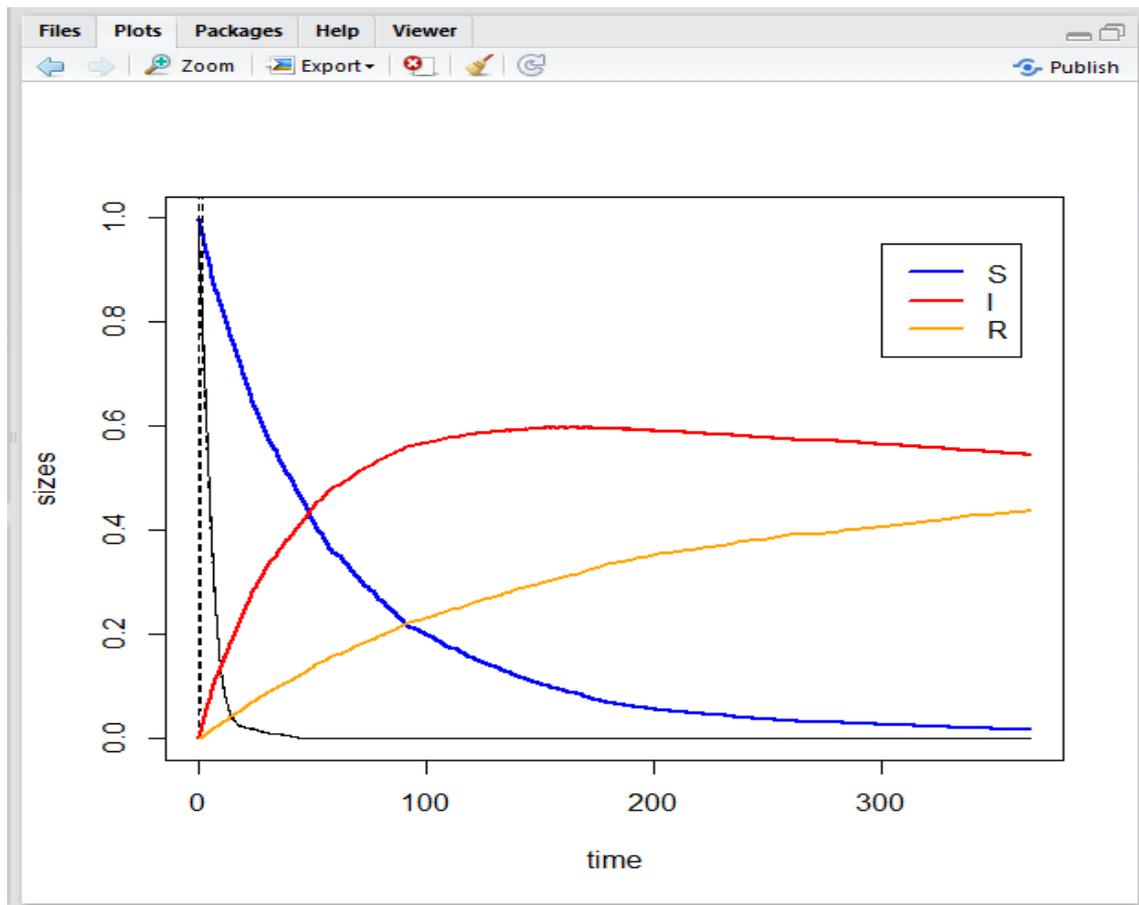


FIGURE 4.7 – Evolution des Pramètres en fonction du temps.

En fixant $a_0 = 14.600$ jours, soit 40 ans on obtient le graphique suivant :

4.5. Courbe Représentative de la Variation du Nombre d'Individus de Chaque Compartiment

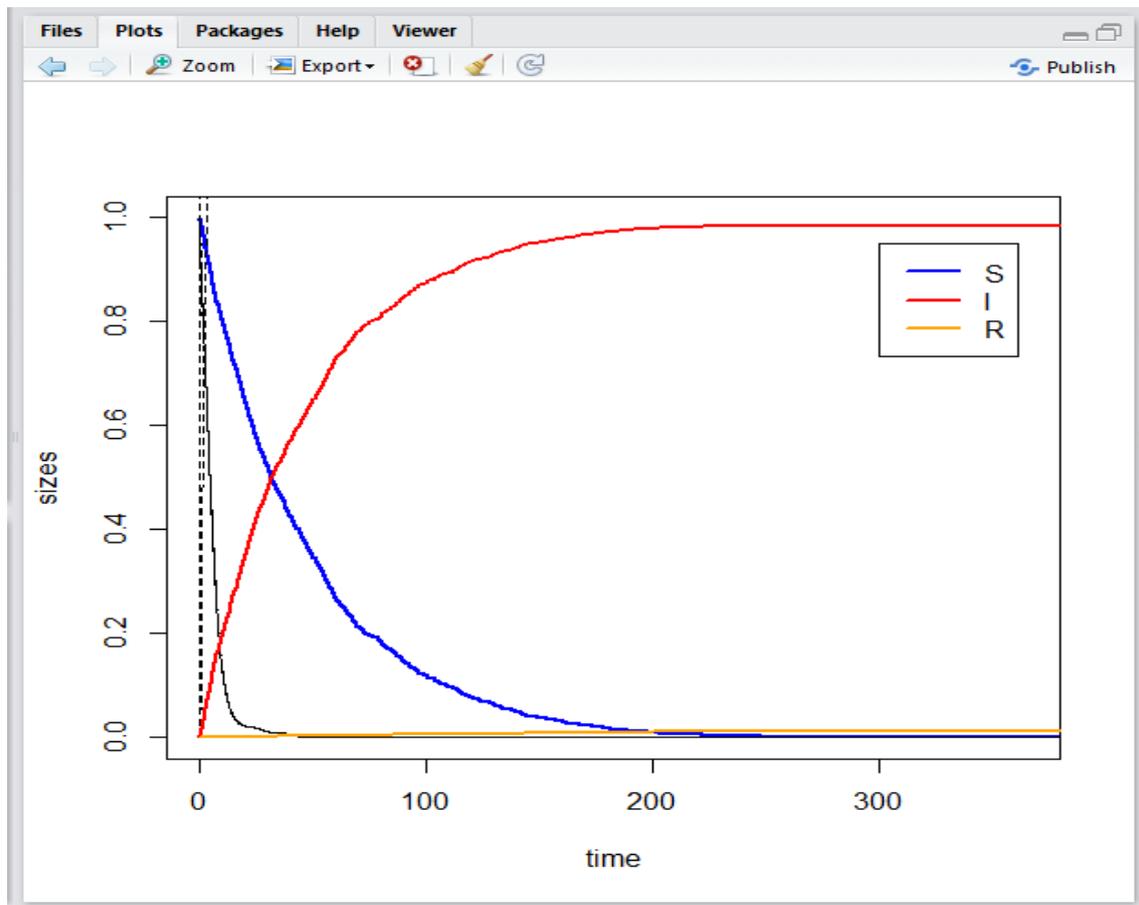


FIGURE 4.8 – Evolution des Pramètres en fonction du temps.

Fixons $a_0 = 7.300$ jours, soit 20 ans. Nous obtenons le résultat suivant :

4.5. Courbe Représentative de la Variation du Nombre d'Individus de Chaque Compartiment

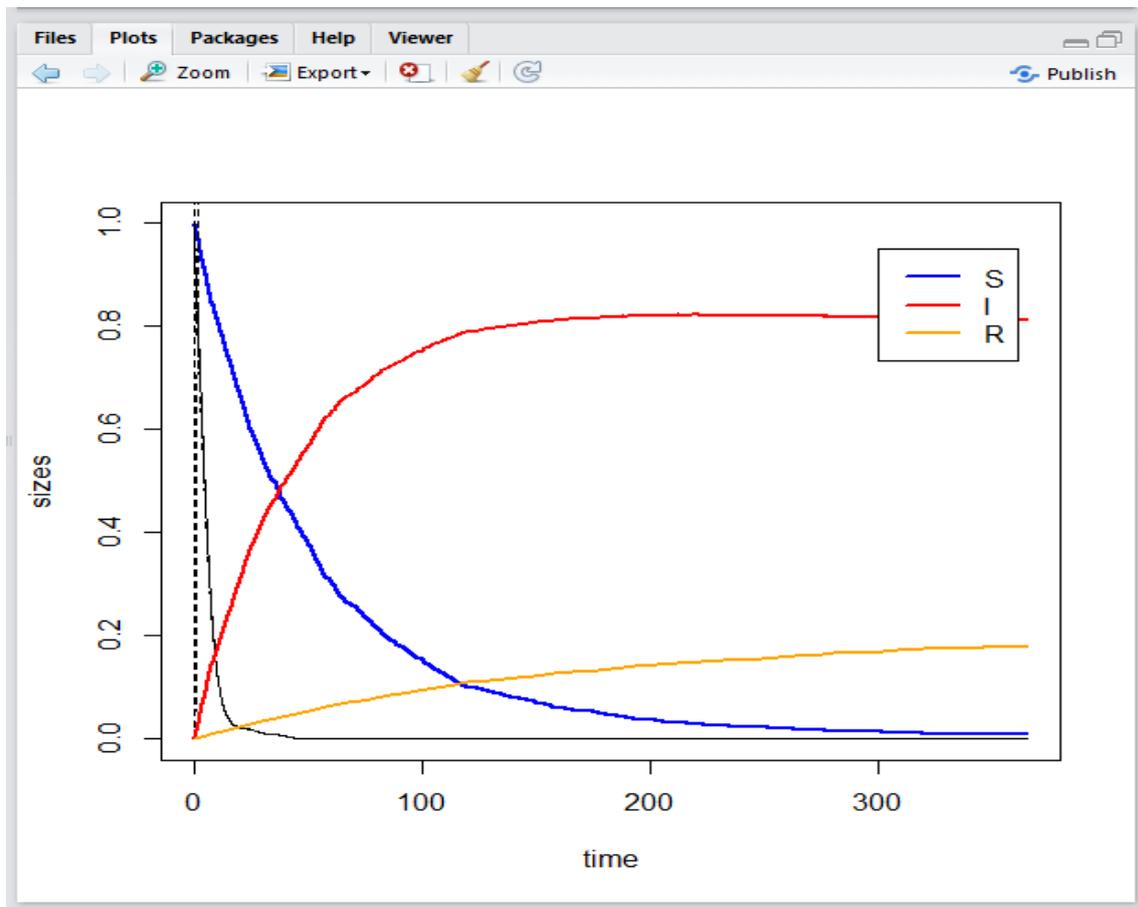


FIGURE 4.9 – Evolution des Pramètres en fonction du temps.

Diminuons a_0 à 1825 jours, soit 5 ans Nous obtenons le résultat suivant :

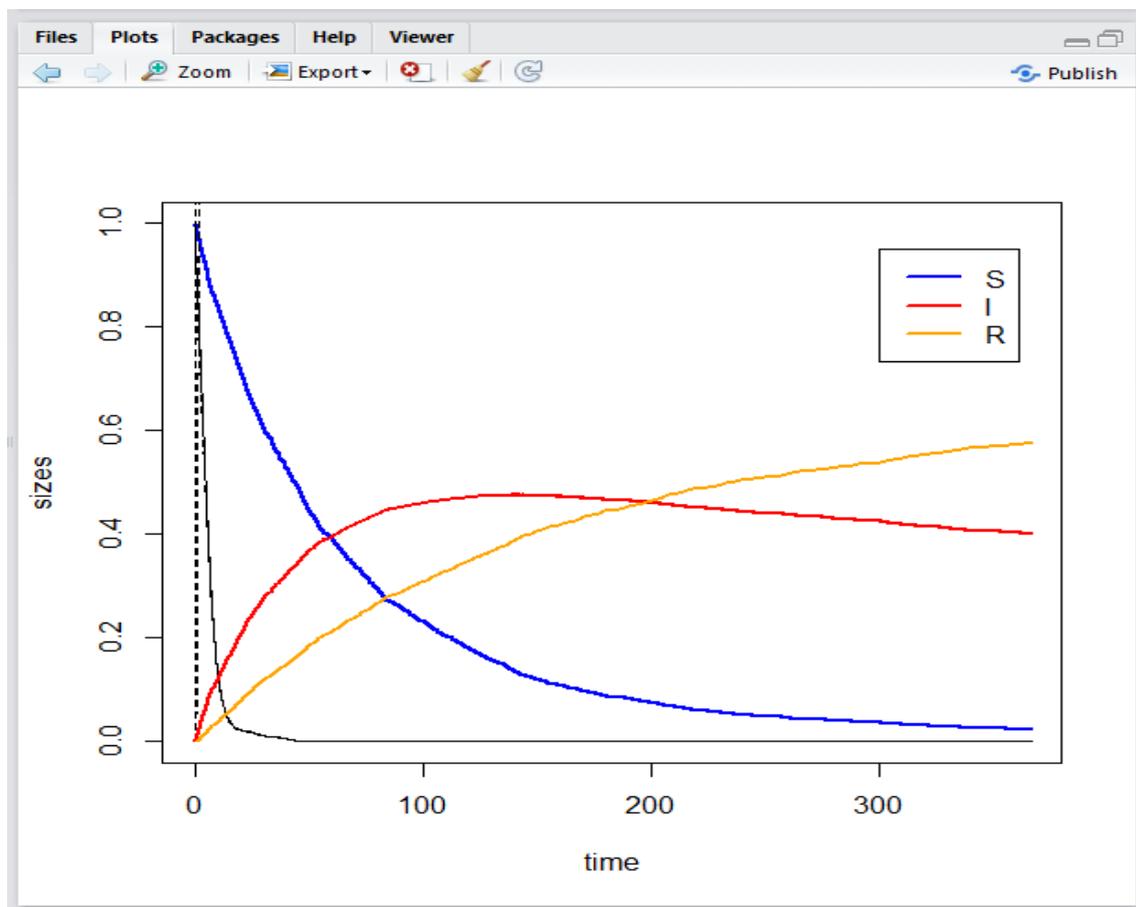


FIGURE 4.10 – Evolution des Paramètres en fonction du temps.

Nous remarquons la variation du nombre d'individus guéris dans le sens contraire de l'âge de naissance. Cela montre que l'âge est un facteur important dans l'analyse des modèles épidémiologiques. Par conséquent, les individus de même âge doivent subir le même traitement.

4.6 Mise en Évidence de la Loi des Grands Nombres

Dans cette section, nous allons fixer l'âge $a_0 = 10$ ans. La mise en évidence de la loi des grands nombres se fait en variant la taille de la population dans le sens croissant. Nous observerons le comportement de chaque courbe

au niveau de chaque compartiment lorsque la taille N varie.

On fixe la taille de la population $N = 1000$ individus parmi les quels il y a $I_0 = 100$ infectés. Cela signifie que le nombre de susceptibles est égal à $S_0 = 900$. On laisse inchanger les autres paramètres depuis le début de la simulation. On obtient le résultat suivant :

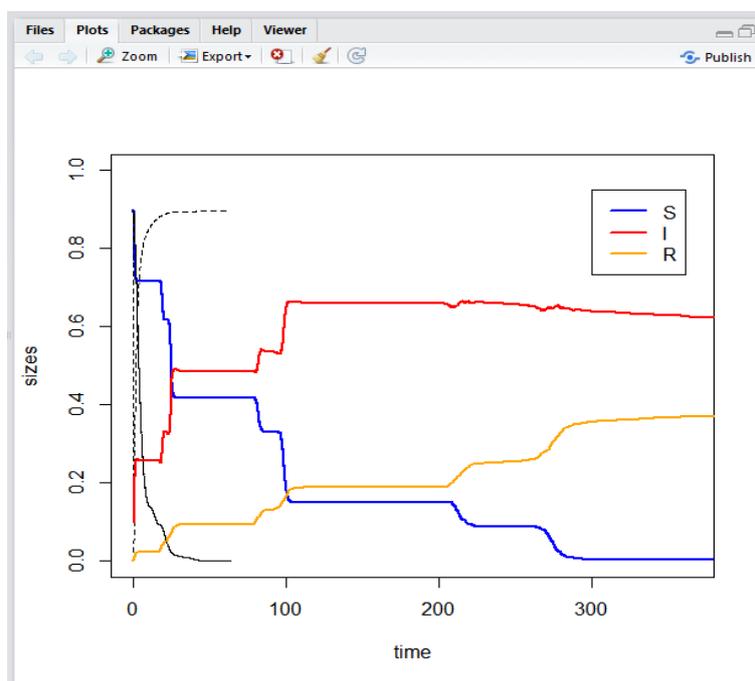


FIGURE 4.11 – Mise en évidence de la loi des grands nombres pour $N=1000$

Dans le graphique (4.11), les courbes représentées en bleu, rouge et jaune sont celles du modèle stochastique. Par contre, celles représentées en noire sont issu du modèle déterministe.

Trois courbes représentées en noire n'arrivent pas à décrire l'évolution du phénomène épidémiologique sur les 365 *jours*. En effet, avant le 100^{ième} *jours* de l'année épidémiologique, les courbes du modèle déterministe n'évoluent plus. Cela montre l'inadaptation de ce modèle pour une population de taille

$N = 1000$ individus.

Par contre, les courbes du modèle stochastique évoluent et décrivent le phénomène épidémiologique sur les 365 *jours*. Cela montre son adaptation pour une population de taille $N = 1000$ individus.

Une analyse du même graphique montre qu'en fixant la taille de la population $N = 1000$ individus les courbes du modèle stochastique sont très éloignées de celles du modèle déterministe. Cela signifie que pour une population de taille $N = 1000$ individus le modèle stochastique est loin du déterministe. le modèle stochastique étant le modèle qui décrit le phénomène épidémiologique durant la période endémique, l'on doit donc le considérer lorsque la taille de la population est $N = 1000$ individus.

Maintenant fixons $N = 10000$, $S_0 = 9900$ et $I_0 = 100$. Laissons inchanger les autres paramètres. On obtient le résultat suivant :

Pour $N = 10000$ individus les courbes du modèle déterministe et celles du modèle stochastique évoluent et décrivent la manifestation du phénomène endémique sur les 365 *jours*. Ce qui n'est pas le cas pour les courbes déterministes précédentes.

Le modèle déterministe est donc adapté pour décrire le phénomène endémique, lorsque la taille de la population est augmentée à $N = 10000$ individus. L'analyse des graphiques (4.12) et (4.11) montre que l'augmentation de la taille de la population à $N = 10000$ individus, favorise le déplacement des courbes stochastique vers celles dites déterministes.

Augmentons la taille de la population à $N = 100000$ individus. On fixe le

4.6. Mise en Évidence de la Loi des Grands Nombres

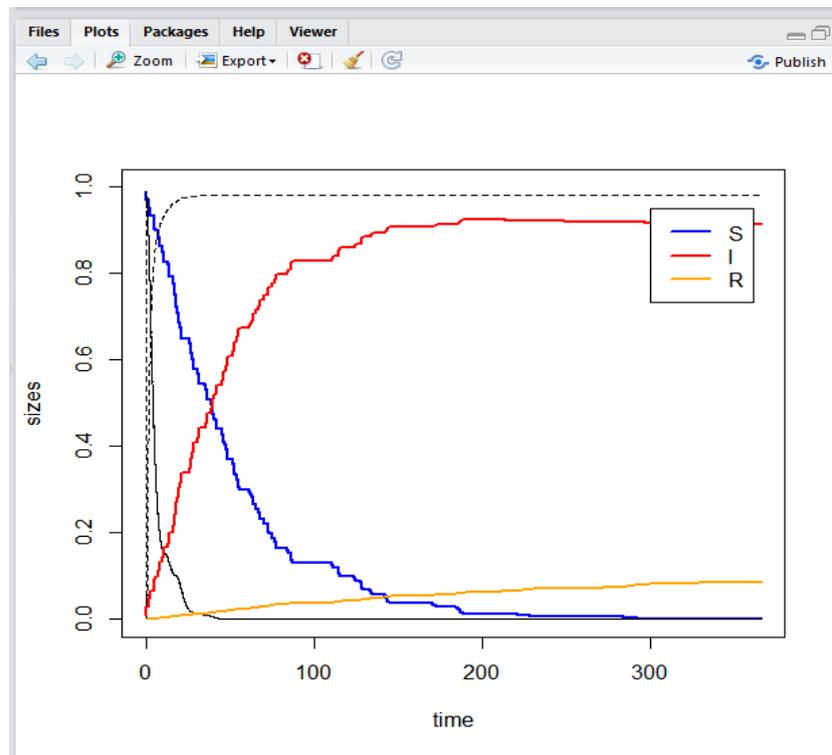


FIGURE 4.12 – Mise en évidence de la loi des grands nombres pour $N=10000$

nombre de susceptibles au début de l'épidémie à $S_0 = 99000$ individus. Le nombre d'individus initialement infectés est fixé à $I_0 = 100$. Le résultat est le suivant :

4.7. Mise en Évidence du Théorème de la Limite Centrale

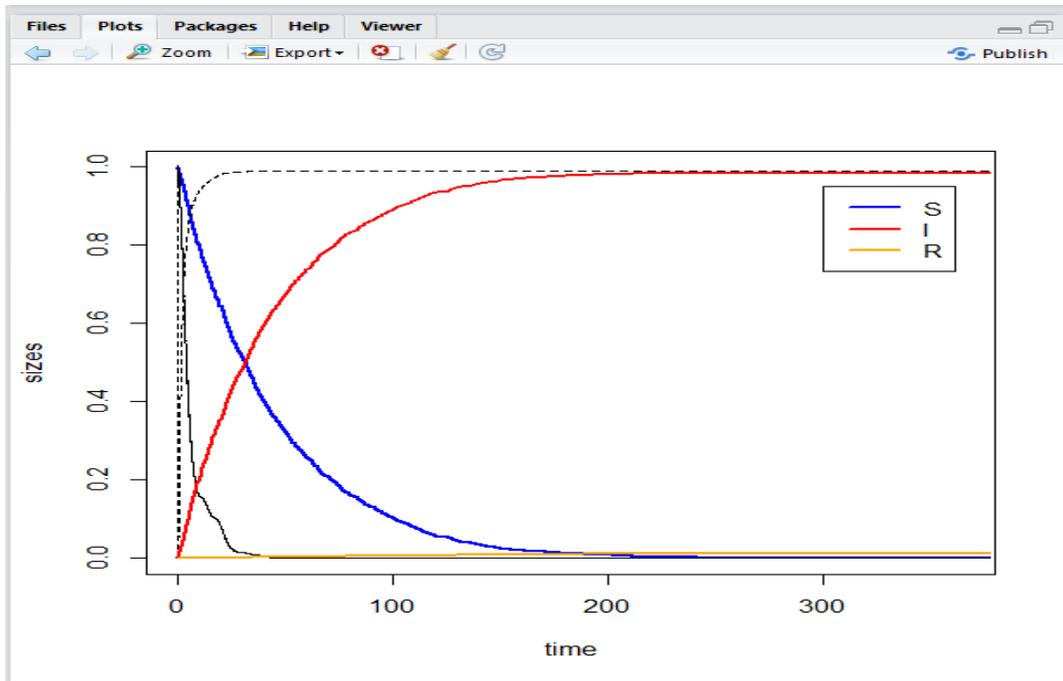


FIGURE 4.13 – Mise en évidence de la loi des grands nombres pour $N=100000$

4.7 Mise en Évidence du Théorème de la Limite Centrale

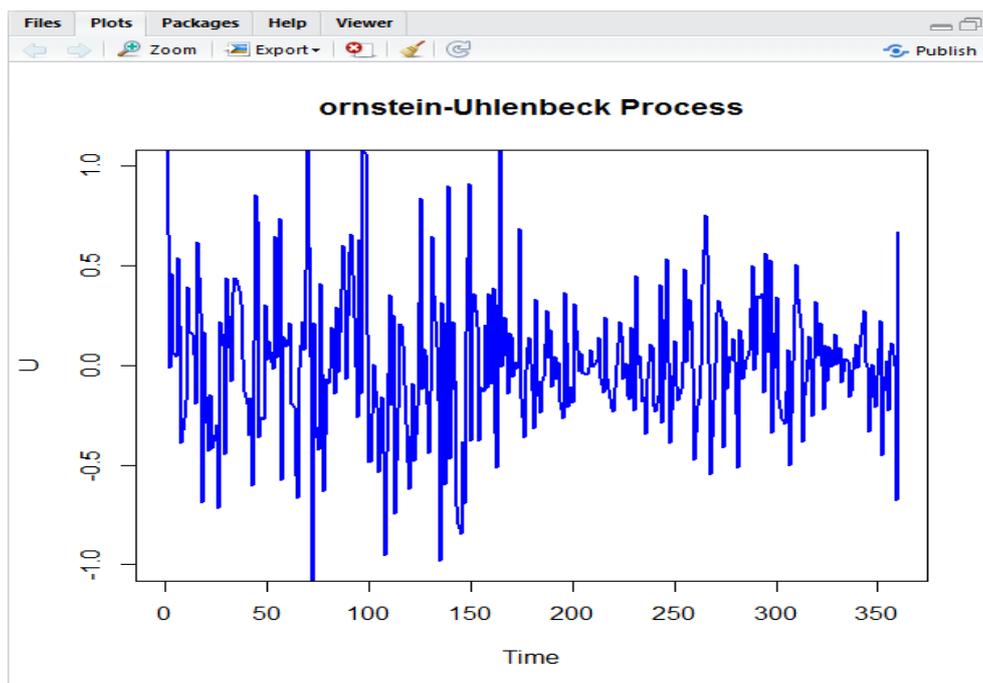


FIGURE 4.14 – Mise en évidence du théorème de la limite centrale

Conclusion

Nous avons montré que l'âge est un facteur important dans l'analyse des modèles épidémiologiques. Par conséquent, les individus de même âge doit subir le même traitement.

En outre, les courbes du modèle stochastique se comparent à celles dites déterministe lorsque la taille de la population est grande. Cela montre l'existence d'une information dans le déterministe que cherche le modèle stochastique. Ainsi, la loi des grands nombres est donc satisfaite : C'est-à-dire le modèle stochastique converge vers le modèle déterministe.

En clair, au cours d'une épidémie dans une population structurée en âge, lorsque la taille de la population est petite, l'on peut considérer le modèle stochastique obtenu.

Par contre, si la taille de la population est très grande, à partir de cet instant l'on peut considérer le modèle déterministe.

Conclusion et Perspectives

Nous avons présenté un aperçu des méthodes de modélisation des modèles épidémiologiques dans une population structuré en âge. Un certain nombre de formules ont été introduites. Les calculs de probabilité qui y conduisent restent finalement assez simples.

Au cours de ces calculs, nous avons considéré un modèle épidémiologique du type *SIR* déterministe structuré en âge. On a trouvé une modélisation stochastique de ce modèle. Le modèle stochastique permet de maîtriser une épidémie de maladie qui règne dans une petite population. L'étude des propriétés de ce modèle stochastique montre qu'il converge vers le modèle déterministe. l'application du théorème de la limite centrale montre que le processus limite est un processus gaussien.

On a obtenu par la méthode de simulation les même résultats que la méthode théorique. Cette méthode de simulation montre que l'âge et la taille de la population sont deux variables d'actions que l'on doit prendre en compte dans le traitement des patients.

Afin de répondre au mieux au besoin d'amélioration dans un établissement sanitaire, il est important de pouvoir proposer une modélisation. Cette modé-

lisation va permettre de mieux identifier les dysfonctionnements et problèmes rencontrés.

Dans la suite de nos travaux de recherche, les notions sur le taux de reproduction seront développées. l'analyse de nos modèles fera l'objet de la variation simultanée de l'âge a_0 et le temps t .

La modélisation constitue une aide considérable au niveau de la phase d'analyse de l'être humain.

Bibliographie

- [1] Alain-Jacques VALLERON (63) : *Professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie, praticien hospitalier à l'hôpital Saint-Antoine à Paris et membre de l'Académie des sciences*, Magazine N^o670 Décembre 2011-Épidémiologie : au service de la santé.
- [2] E.Padoux : *Mathematical Models of Epidemics*, CIMPA School Ziguinchor, Dec. 2015.
- [3] E.Pardoux : *Processus de Markov et applications*. édition, 2006.
- [4] H.Inaba : *Thresold and stability results for an age-structured epidemic model*, Journal of mathematical Biology, Springer-Verlag 1990.
- [5] Jean-François LE GALL : *MOUVEMENT BROWNIEN, MARTINGALES ET CALCUL STOCHASTIQUE*. Université Paris-Sud 30 septembre 2011.
- [6] Régis Ferrière, Viet Chi Tran : *Stochastic and deterministic models for age-structured populations with genetically variable traits* April 12, 2009.
- [7] Zhilan Feng, Wenzhang Huang, Carlos Castillo-Chavez : *Global behavior of a multi-group SIS epidemic model with age structure*. Journal of

BIBLIOGRAPHIE

Differential Equation. Available online 10 Decembre 2004.